Ю. М. КОЛЯГИН

Задачи в обучении математике

II

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ШКОЛ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Ю. М. КОЛЯГИН

ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ II

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ ЧЕРЕЗ ЗАДАЧИ И ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1977

К $\frac{60501 — 537}{103\ (03) — 77}$ заказное

© Научно-исследовательский институт школ МП РСФСР (НИИ школ МП РСФСР), 1977 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ЧЕРЕЗ ЗАДАЧИ 4
2. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ 25
3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО ВОСПИТАНИЯ . 56
4. ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО КОНТРОЛЯ И ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ 85
5. ОТБОР ЗАДАЧ УЧИТЕЛЕМ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ 118
6. О ФОРМИРОВАНИИ УМЕНИЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ . . 125
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 139

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является продолжением книги «Математические задачи как средство обучения и развития учащихся», представляющей первую часть работы «Задачи в обучении математике».

В первой части раскрывается роль и место задач в свете современных требований к уровню общеобразовательной подготовки, развития и воспитания выпускников средней школы — будущих строителей коммунистического общества, в условиях НТР, а также роль и место задач в воспитании у школьников математической культуры, отвечающей целям математического образования на современном этапе развития советской школы.

Там же рассмотрены психолого-дидактические основы методики эффективного использования задач в системе развивающего и воспитывающего обучения математике. Исследуются теоретические вопросы, связанные с самим понятием задачи, классификацией учебных задач, процессом их решения; определяются функции задач в обучении математике.

Во второй части книги рассматриваются наиболее важные вопросы методики применения задач как важного средства обучения математике и математического развития школьников; здесь же формулируются основные методические принципы обучения решению задач и обучения математике через задачи, даются рекомендации, направленные на повышение качества обучения, воспитания и развития школьников, изучающих математику, формулируются основные результаты исследования в целом и соответствующие им выводы.

1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ЧЕРЕЗ ЗАДАЧИ

1.1. Характеризуя сущность обучения, известный советский кибернетик А. А. Фельдбаум писал: «Обучение есть особая частная форма процесса познания, индивидуальная, не вполне самостоятельная и ограниченная... Основная и общая цель обучения состоит в приобретении умения и навыков успешного взаимодействия человека с той средой, в которой он живет. Для этого требуется как приобретение знаний, так и развитие способностей. Однако второе для человека в общем гораздо важнее, чем первое»[1]. В качестве основных составляющих процесса обучения, рассматриваемого с психологической точки зрения, в этой работе он выделяет восприятие, мышление и приобретение умений и навыков. Важнейшим условием правильности восприятия является, по его мнению, его осмысленность, узнавание знакомых образов; для мышления — понимание (построение в мозгу структуры связей в изучаемой области соответствующих характеру реальной действительности, т. е. адекватной этой действительности модели); через умения и навыки обнаруживается понимание сущности изучаемого объекта, их формирование предполагает запоминание, упражнения в применении знаний, переосмысливание неверно понятого и т. д.

Характеристика, данная А. А. Фельдбаумом, хорошо согласуется с современной точкой зрения на обучение, согласно которой обучение — это не просто передача учителем (или учебником) готовых знаний учащимся, а сложный процесс эффективного взаимодействия учителя и учащихся, это их совместная деятельность (при ведущей роли учителя), направленная на формирование у каждого школьника черт, присущих образованной и всесторонне развитой личности.

Для периода НТР характерно резкое возрастание объема информации, необходимой для ее усвоения уже на уровне школьного обучения. Однако из-за ограниченности сроков обучения и возможностей человеческой памяти эффективное усвоение содержания школьного обучения невозможно свести к их запоминанию и воспроизведению. Важным средством, обеспечивающим продуктивное усвоение знаний, является дифференциация. Согласно этой идее

---

[1] Фельдбаум А. А. Процессы обучения людей и автоматов. — В сб.: Методы оптимизации автоматических систем. Под ред. Я. З. Цыпкина. М., 1972, с. 112.

из общего объема знаний следует выделить те, которые должны быть усвоены прочно как необходимые для жизни и работы всякого образованного человека.

Однако проблема совершенствования математического образования, приведения его в соответствие с требованиями научно-технического прогресса не может быть решена только путем перестройки содержания изучаемого в школе курса математики и соответствующей организации учебного материала вокруг основных идей, теорий и понятий. Необходима серьезная перестройка форм и методов обучения математике, направленная на продуктивное усвоение школьниками системы ведущих знаний, на эффективное их воспитание и развитие.

С точки зрения советской дидактики в обучении всегда ясно выступают две его стороны: *преподавание* (деятельность учителя) и *учение* (сознательная познавательная деятельность учащихся). Исходя из этого понимания процесса обучения можно сказать, что методы обучения включают в себя методы преподавания (средства, приемы, способы информации, управления и контроля познавательной деятельностью школьников) и методы учения (средства, приемы, способы познания учебного материала, репродуктивные и продуктивные приемы учения и самоконтроля) в их органической взаимосвязи. Другими словами, с помощью методов обучения создаются также учебные ситуации, в которых в соответствии с поставленной заранее целью реализуются и преподавание и учение.

В дидактике имеется около сотни различных определений понятия «метод обучения», которые с точки зрения практики школьного обучения не представляются существенно полезными (равно как и пресловутые попытки подсчета числа методов обучения). Оставляя в стороне эти, часто весьма схоластические попытки однозначно определить, что такое метод обучения, мы тем не менее должны иметь представление о том, что понимаем под методами обучения в том случае, когда занимаемся разработкой конкретной методики обучения математике. Многогранность современного обучения привела к существенному изменению объема и содержания этого понятия.

Детализируя точку зрения на трактовку понятия «метод обучения», высказанную А. И. Маркушевичем на одном из семинаров в НИИ СиМО АПН СССР, можно, на наш взгляд, остановиться на следующем. В современных условиях под методами обучения следует понимать упорядоченные *комплексы* дидактических приемов и средств, с помощью которых реализуются определенные (общие или конкретные) цели обучения, воспитания и развития школьников.

При таком понимании методов обучения вряд ли имеет смысл говорить о тех или иных методах обучения в «чистом виде» (разве что для теоретических исследований), ибо в практике школьного обучения таковые никогда не проявляются. Трудно себе представить, например, что так называемый эвристический метод обучения

мог бы быть эффективно применен в обучении математике в изоляции от какого-либо метода, относящегося к типу репродуктивных. Вряд ли любой способ изложения материала учителем (рассказ, лекция и т. п.) приведет к реализации поставленной заранее цели, если он не выступит в комплексе с какими-либо иными приемами и средствами обучения.

Имеющая еще место в дидактике тенденция расчленить, выделить те или иные методы обучения, выявить среди них наиболее эффективные в практике обучения не приводит и не может привести к хорошим результатам. Каждый отдельный прием, средство обучения (а тем более их сочетание) имеет свою специфику, определяемую не только такими объективными факторами, как цели и содержание обучения, стадия обучения, возрастные и индивидуальные возможности учащихся, конкретные условия обучения и т. п., но и такими субъективными факторами, как, например, личность самого учителя, его квалификация, его предрасположение к использованию данного дидактического приема и средства и т. п. В зависимости от времени, места его применения, характера сочетания в нем различных способов, приемов и средств один и тот же метод обучения может оказаться эффективным и неэффективным. Сказанное не следует понимать в пессимистическом плане, так как в распоряжении учителя имеется достаточно богатый арсенал методов, отдельных приемов и средств обучения, для того чтобы учитель мог сам, сообразуясь с условиями обучения, эффективно использовать те или другие из них.

При таком понимании сущности понятия «метод обучения» известные нам ранее методы обучения (эвристический, метод программированного обучения и т. п.) терминологически превращаются в определенные приемы, средства, форму, входящие в указанный комплекс. Но дело, конечно, не в терминологии (не в том, как теперь называть ту или иную форму обучения или как отличить прием от метода), а в существе вопроса. Существо же вопроса состоит, по нашему мнению, в том, что найти удачный метод обучения в каждом конкретном случае означает найти удачную комбинацию различных приемов и средств, позволяющую достичь поставленной заранее цели (или целей) наиболее оптимальным в данных условиях путем.

В практике обучения математике по действующим программам чаще всего наблюдается именно комплексное применение различных приемов, способов и средств обучения, эффективность которых жестко определяется их соответствием главной цели данного этапа обучения и ее достижением.

Не вызывает сомнения тезис о том, что традиционная методика в целом не отвечает тем целям, которые стоят перед современной школой, прежде всего потому, что она слабо отражает идейно-философскую сторону обучения математике, ее мировоззренческий аспект и воспитательные возможности; в рамках традиционной методики эти важные аспекты воспитывающего обучения обычно

являлись более или менее удачным довеском. В традиционной методике сложились и определенные взгляды на формирование навыков, которое, как правило, сводилось к тренировке (типа натаскивания), к формальному заучиванию формул и запоминанию алгоритмов. Неправильная ориентация характерна для традиционной методики и в вопросах, связанных с решением задач, определением роли индукции и дедукции в обучении, роли учебных и справочных материалов. Однако, говоря о том, что традиционная методика в целом не может обеспечить эффективное обучение математике на современном этапе, не следует распространять эту мысль на традиционные (в смысле «старые») методы обучения математике. Деление методов обучения на «новые» и «старые» не имеет смысла (тем более, если трактовать метод обучения в вышеуказанном смысле).

Бытующий еще в практике обучения математике тезис о том, что новое содержание обучения предполагает использование только новых методов обучения, неверен по существу. Достаточно сослаться на часто используемую сегодняшними учителями эвристическую беседу, чтобы подтвердить это положение. Критерием применимости того или иного метода, приема, средства обучения математике в современных условиях является, на наш взгляд, его соответствие «духу» и «букве» проведенной реформы школьного математического образования. Понятно, что известные (традиционные) приемы, средства и методы обучения, даже в целом отвечающие целям современного обучения, воспитания и развития, не могут быть перенесены в практику механически и должны быть соответствующим образом модернизированы (усовершенствованы).

Современное содержание обучения и его цели предъявляют к методам обучения следующие требования: они должны быть такими, чтобы работа учащихся в учебном процессе была активной; они должны обеспечивать глубокое понимание школьниками изучаемого материала и прочное усвоение его основ.

Первое требование связано с тем, что процесс обучения есть процесс взаимодействия учащихся и учителя, в котором, несмотря на ведущую роль учителя, конечные результаты обучения (понимаемого в широком смысле) зависят от познавательной деятельности самих учащихся. Второе требование связано с тем, что его выполнение не только способствует качественному усвоению определенной системы знаний, но и имеет первостепенное значение для реализации целей воспитания и развития. Именно глубокое и сознательное усвоение учащимися программного материала раскрывает его смысл, показывает значение получаемых знаний как для текущей учебной работы, так и для будущей практической деятельности, побуждает к использованию (и развитию) различных приемов умственной деятельности.

Кроме того, в современной дидактике указывается и на то, что методы обучения должны быть такими, чтобы обеспечивались:

а) более быстрые темпы усвоения и переработки учащимися научной информации;

б) более быстрые темпы формирования у учащихся умения оперировать новыми знаниями;

в) повышение воспитывающей и развивающей роли обучения;

г) устранение перегрузки учащихся и высвобождение их времени для удовлетворения своих духовных интересов[1].

Из названных требований к современным методам обучения остановимся детальнее на требовании «повысить развивающую роль обучения».

Сейчас от специалиста любой отрасли производства требуются разносторонние знания, высокоразвитое мышление, творческие способности, умение систематически пополнять свои знания, быстро осваивать новую технику и технологию.

Важная задача школы сегодня состоит не только в том, чтобы вооружить молодежь современными знаниями и умениями, но и в том, чтобы нацелить ее на дальнейшее непрерывное приобретение новых знаний.

Мы уже имели возможность убедиться в том, что в процессе обучения математике это означает формирование у школьников целого комплекса качеств мышления, приемов умственной деятельности, способностей и т. п. К их числу относятся, например, хорошо развитая интуиция, догадка; умение критически оценить изучаемую ситуацию и выбрать из имеющихся средств именно те, которые ведут к оптимальному решению поставленной задачи; умение в соответствии с определенными требованиями планировать свои действия, исходя не только из знаний и опыта, но и руководствуясь здравым смыслом; выявить ведущую идею, «ключ» решения данной задачи; вычленить из целого отдельные признаки, связи и соотношения или объединить их в единое целое; умение обобщать, систематизировать и т. п., т. е. осуществлять сложную аналитико-синтетическую деятельность; умение выполнять взаимосвязанные мыслительные операции: наблюдать, сравнивать, анализировать, обобщать, абстрагировать, конкретизировать; обладать хорошо развитыми способностями к быстрому восприятию, выявлению существенного, к запоминанию и воспроизведению; проявлять активность, самостоятельность в суждениях и действиях; уметь осуществлять самоконтроль и саморегулирование своих действий и планов; владеть основными приемами дедуктивных рассуждений; уметь экономно, четко, сжато, логично излагать свои мысли в речи и символах; обладать устойчивым интересом к учению; быть целеустремленным, способным к эмоциональному восприятию процесса деятельности и ее результатов и т. д.

Формирование у школьников указанных (и подобных им) компонентов обучения, воспитания и развития составляет сущность так называемого развивающего обучения (напомним, что воспитывающий характер любой формы обучения является одним из глав-

[1] См.: Усова А. Формирование обобщенных умений и навыков. — «Народное образование», 1974, № 3, с. 118.

ных принципов советской дидактики и потому явное упоминание о нем просто излишне).

Таким образом, развивающее обучение предусматривает:

1. Формирование у учащихся системы ведущих знаний, умений и навыков, обладающей в силу своей общности определенной стабильностью и активностью.

2. Воспитание у учащихся высокого уровня умственного развития, способности творчески решать проблемы и задачи, выдвигаемые современным обществом, потребность и способность к труду и самообразованию.

Концепция развивающего обучения, связанная с процессом обучения в целом, особенно важное значение имеет в процессе обучения математике, прежде всего, потому, что сама математика имеет сейчас большое прикладное значение. В силу своей специфики математика связана с творческим процессом решения различных теоретических и практических задач во многих областях науки, техники и народного хозяйства.

Методологической основой развивающего обучения (как и вообще всякого развития) являются общие диалектические законы: единство и борьба противоположностей, переход количества в качество, отрицание отрицания. С этой точки зрения движущей силой умственного развития школьников также является преодоление диалектических противоречий «...между прежним опытом учащегося и новыми знаниями, между общественным значением знаний и его личными потребностями и склонностями, между наглядно-чувственной оболочкой изучаемых явлений и их абстрактной сущностью, между существенными и несущественными признаками явлений и понятий и т. п.»[1]. В ходе обучения, в процессе мыслительной деятельности, направленной на разрешение подобных противоречий, и совершается умственное развитие школьников (в частности, проблемное обучение, направленное на выявление и преодоление различных противоречий, активизирующее мыслительную деятельность школьников, способствует формированию у них диалектического мировоззрения).

К числу диалектических законов развития мышления, ярко проявляющихся в развивающем обучении, относятся также общие принципы подхода к исследуемым (изучаемым) объектам и явлениям, вытекающие из общего диалектико-материалистического понимания мира, например:

а) принцип, требующий учета всех (могущих быть выделенными на данной ступени познания) сторон и связей изучаемого объекта с другими предметами;

б) принцип, требующий учета практики как критерия истины для выявления наиболее существенных свойств объекта;

в) принцип, требующий рассмотрения объекта в развитии;

---

[1] Костюк Г. С. Некоторые вопросы взаимосвязи воспитания и развития личности. — «Вопросы психологии», 1956, № 5, с. 12—13.

г) принцип конкретности, требующий конкретности в постановке и решении задач и т. д.[1].

К диалектическим законам мышления относятся также законы логического воспроизведения в мышлении процесса возникновения и эволюции тех или иных объектов. Так, например, в процессе обучения геометрии принципы общего подхода к изучаемым предметам и явлениям уже реализуются при построении учебного материала в учебнике, а потому должны учитываться при разработке методики развивающего обучения. Так, при введении понятия «многоугольник» в курсе геометрии VI класса, принцип, требующий рассмотрения объекта в его развитии, реализуется принятой учебником линией развития этого понятия: простая ломаная, замкнутая ломаная, объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области, многоугольник. Эффективная методика изучения этого понятия должна строиться так, чтобы сделать эту линию развития понятия линией развития его познания самими учащимися.

Итак, методологической основой развивающего обучения, как и всех указанных направлений совершенствований учебного процесса, является диалектический материализм.

Одним из важных общих исходных положений методики развивающего обучения математике является марксистско-ленинское учение о решающей роли социальных условий в формировании человеческой личности, о ведущей роли сознания в деятельности людей, о формировании личности человека в процессе активного взаимодействия с окружающим миром, о том, что методы познания действительности лишь тогда являются научными, когда они отражают объективные законы самой действительности. Методика развивающего обучения математике в средней школе опирается также на марксистско-ленинское положение о том, что правильный подход к познанию тех или иных конкретных явлений природы и общества требует овладения знанием общих законов развития всего материального мира, которые постигаются через познание их конкретных проявлений посредством обобщения и абстрагирования.

Эффективные методы обучения, с помощью которых реализуется развивающее обучение математике, — это, прежде всего, методы, способствующие формированию у школьников умения самостоятельно приобретать знания (наблюдение, эксперимент, сбор, обработка и классификация данных, использование учебного и справочного материала, прогнозирование, моделирование ситуаций, актуализация знаний и опыта и т. п.). Сюда же относятся методы рационального учения, благодаря которым знания учащихся становятся прочными, глубокими и действенными, а мышление приобретает такие свойства, как гибкость и самостоятельность, проявляемые в тех случаях, когда полученные знания надо применить в раз-

---

[1] См.: Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 42, с. 289—291; т. 29, с. 201—203.

личных ситуациях. Несмотря на свой специфический характер (а может быть, даже благодаря ему), методы обучения математике могут (и должны) способствовать достижению этой важной общей цели образования.

Отметим еще один важный аспект, связанный с проблемой развивающего обучения. Уже весьма продолжительное время в центре внимания педагогической общественности находится важная проблема установления в обучении органических межпредметных и внутрипредметных связей. Следует заметить, что решение этой проблемы преимущественно осуществляется по линии содержания школьного обучения. Наряду с этим представляется весьма важным осуществление межпредметных и внутрипредметных связей и по линии методов обучения (с акцентом на методах изучения). До сих пор эта проблема в явном виде почти не формулировалась, хотя в практике обучения такая связь уже имеет место. В самом деле, известный эвристический метод обучения (в различных своих формах и проявлениях) успешно используется не только учителями математики, но и учителями физики, химии, биологии и даже некоторых предметов гуманитарного цикла. Но это пока осуществляется по линии методов преподавания, но не по линии методов изучения. Между тем умение учащихся грамотно осуществить наблюдение, опыт, сравнение, умение использовать индуктивные методы овладения знаниями, а главное — сознательное применение последних в качестве методов учебной работы — одинаково ценно и для обучения математике, и для обучения другим предметам естественно-математического цикла. Именно в системе развивающего обучения могут найти место такие методы, которые могли бы быть с успехом использованы в обучении другим предметам.

Согласно современным положениям педагогической психологии учение нельзя свести к простому закреплению информации. Учение заключается больше в усвоении методов поиска и решения познавательных проблем, нежели в закреплении школьниками отдельных фактов или частей информации. Усвоение и сохранение в памяти информации является скорее строительным материалом для сложных, происходящих на более высоком уровне мыслительных процессов. В этой связи особенно резко выступает устарелость и порочность такой методики школьного обучения, которая по существу сводит обучение к овладению и заучиванию школьниками учебной информации. Вот почему в системе современных методов обучения математике задачам отводится важнейшая роль. Каким бы ни был выбранный и примененный учителем комплекс средств, способов и приемов, реализующих ту или иную конкретную цель обучения, невозможно себе представить, чтобы в нем не нашла места постановка задач, органически связанная с изучением программного материала и направленная не только на эффективное его усвоение, но и всестороннее развитие и воспитание школьников.

Отметим, что за последнее время понятие учебной задачи существенно расширилось не только по возможностям ее использования

в обучении, но и в отношении той формы, в какой та или иная задача может выступать перед школьниками. Если раньше каждая поставленная перед учащимися задача, как правило, оформлялась в виде короткого и законченного текста (словесного или символического), передающего ее условие, то теперь дело обстоит иначе. Представление задач знаковыми моделями — далеко не единственная форма их предъявления решающему. Задачи все чаще и чаще предстают перед школьниками в целостном комплексе, в тесной связи с той конкретной ситуацией, которая их порождает. В этом случае школьники знакомятся с определенной, достаточно содержательной учебной ситуацией, в ходе исследования которой перед ними ставятся те или иные задачи, выявляющие отдельные свойства этой ситуации или использующие эту ситуацию в качестве основы для определенных обобщений, ведущих к овладению новыми для них знаниями. Нередко такая ситуация создается с помощью специальных дидактических пособий (линеечек Кюзинера, блоков Дьенеша, геоплана Карасева — Гаттеньо и др.).

При этом подразумевается весьма активное и по возможности самостоятельное познание школьниками той или иной идеи, факта, свойства. Поэтому как сами задачи, так и их решения часто выступают перед школьниками в неявном виде; одна задача незаметно сменяет другую (или перерастает в нее). В ходе постановки этих задач часто используются целевые указания к определенного вида деятельности, установки на порядок ее осуществления и т. п. «Рассмотрите то-то», «Возьмите это», «Пронаблюдайте за тем-то» — типичные фразы, свидетельствующие об определенных этапах изучения некоторой ситуации, об определенных этапах решения возникающих при этом задач.

Таким образом, сами задачи выступают в роли средства для изучения математики, а их упорядоченный комплекс — в виде определенного метода изучения математики. Грубо говоря, в этом случае задачи сливаются с методикой обучения, становятся почти неотличимы от указаний учителя по организации учебной деятельности школьников. Такая ситуация имеет место, например, при осуществлении проблемного обучения. Такого рода обучение детей успешно осуществляется не только на уровне школы, но и ранее, например в детском саду.

В методике математики некоторых зарубежных стран этот способ организации учебной деятельности школьников получил даже специальное название метода активного обучения или обучения на моделях. В основу этой методики положены следующие психолого-дидактические принципы:

1. Школьники должны по возможности самостоятельно устанавливать те или иные математические факты и закономерности.

2. Обучение целесообразно строить на основе использования специального дидактического материала, с которым школьник может непосредственно манипулировать.

3. Процесс познания школьника должен по преимуществу осу-

ществляться через непосредственные, активные и целенаправленные действия, которые он учится координировать[1].

Нетрудно обнаружить, что указанный метод обучения является определенной модификацией так называемого эвристического метода обучения математике, который давно используется в работе учителя советской школы. Не отрицая безусловной полезности этого заново возродившегося метода обучения, отметим тем не менее, что многие методисты-математики западных стран придают ему излишне универсальный характер. В частности, рекомендуя широко использовать этот метод обучения, основанный на «конструкторской интуиции» ребенка, они совершенно обходят молчанием индивидуальные различия в способностях детей одного класса, уровне общего развития и, конечно, в уровне «конструкторской интуиции», наличие которых заставляет сомневаться в его универсальной эффективности, в возможности каждого учащегося изучать математику только путем открытия. Ясно, что определенная учебная информация должна все же сообщаться самим учителем или черпаться из учебника. К тому же построение курса математики (даже его отдельных разделов) в соответствии с методом «открытия» — дело далеко не простое, требующее значительных теоретических и экспериментальных исследований. Правильное решение вопроса об эффективной методике обучения математике в целом, по-видимому, следует искать лишь на пути органического единства самых разнообразных средств, приемов и методов (индуктивно-наглядного, дедуктивного, эвристического и многих других).

Характерная для нашего времени тенденция к усилению роли проблемного обучения свидетельствует о том, что задачи занимают все более ведущее место в обучении математике, часто определяя тот или иной метод обучения математике, в котором основной акцент делается на самостоятельное и творческое усвоение школьниками учебного материала. Проблемное обучение по существу является одной из разновидностей обучения развивающего. В самом деле, по мнению одного из энтузиастов внедрения этой формы школьного обучения В. Оконя, «проблемное обучение — это обучение, основанное на управлении процессом решения учащимися практических или теоретических задач. В этом обучении выступают такие действия учителя, как: а) организация проблемных ситуаций; б) управление процессом формулирования проблем и разработкой учащимися способов их решения; в) управление процессом поисков проверки этих способов; г) организация работы по систематизации, закреплению и применению знаний, полученных учащимися путем самостоятельной учебы и пополняемых из разных источников в ходе решения проблем»[2].

---

[1] Z. Dienes. Construction des mathematiques. Pres. univ. de France. Paris, 1966.

[2] Оконь В. Образование в условиях научно-технической революции. — «Народное образование», 1972, № 7, с. 95.

Исходя из этой, весьма исчерпывающей характеристики проблемного обучения можно утверждать, что формирующее, развивающее влияние современного обучения должно быть заранее спланировано и управляемо так же, как до сих пор планировалась и управлялась передача школьникам математических знаний, формирование специфических умений и навыков.

Говоря об обучении математике через задачи, следует иметь в виду прежде всего организацию проблемного обучения математике (или одной из его разновидностей — так называемого активного метода обучения). Вместе с тем проблемная форма обучения не использует всех возможностей обучения математике через задачи; реализация обучающих, развивающих, воспитывающих и контролирующих функций задач имеет многоплановый характер и может быть успешно осуществлена в ходе применения любых современных методов или форм обучения. Однако эффективное обучение математике через задачи возможно только в условиях развивающего обучения, в реализации которого им принадлежит одна из ведущих ролей.

Существенным условием проявления проблемного обучения являются постановка поисковых задач и исследовательский характер работы учащихся в процессе обучения. Сейчас общепризнанно, что урок в школе не считается эффективным, если на нем учащиеся не работают активно и самостоятельно. Отметим, что в настоящее время проблемное обучение разрабатывается в плане его использования не только на уроках математики, но и на уроках, посвященных изучению самых разнообразных учебных дисциплин (в частности, и дисциплин гуманитарного цикла)[1].

Современные экспериментальные исследования, проведенные в советской и зарубежной школах, свидетельствуют о полезности использования проблемной формы обучения при изучении математики учащимися средней школы, начиная уже с начального школьного возраста. Естественно, что в таком случае перед учащимися можно поставить только те учебные проблемы, которые могут быть ими поняты и разрешены на данном этапе обучения.

Ни у кого не вызывает сомнения полезность специального обучения школьников самостоятельной творческой деятельности, которая является неизбежным компонентом правильно поставленного проблемного обучения. Однако изучение нового материала в проблемной форме требует больших затрат учебного времени. Правда, и при наличии времени строить все обучение в форме проблемного было бы явно нецелесообразно в силу многих причин. В частности, само содержание программного материала бывает таким, что его проблемное изучение явно нецелесообразно. Кроме того, однообразие форм и методов обучения не повышает его эффективность. По-

[1] См.: Брушлинский А. В. Психология мышления и кибернетика. М., 1970, с. 57—58.

этому правомерно, что проблемное обучение математике в практике обучения реализуется эпизодически. Вместе с тем следует отметить, что «время, затраченное на фундаментальные вопросы, проработанные с личным участием учащихся, — не потерянное время: новые знания приобретаются почти без затраты усилий благодаря ранее полученному глубокому мыслительному опыту»[1].

Приведенное высказывание известного математика-методиста С. Крыговской указывает на значимость обучающих функций, присущих проблемному обучению. Не менее важны и многообразны его развивающие функции. Однако для их реализации требуется более широкое использование этой формы обучения, чем то, которое имеет место (и целесообразно) при изучении программного материала. Возникающее здесь противоречие может быть успешно разрешено, если эта форма обучения широко используется на внеклассных (факультативных) занятиях. Для того чтобы такими занятиями было охвачено как можно большее число учащихся, учителю необходимо создавать математические кружки из учащихся, интересующихся математикой (понятно, что кружковые занятия не должны мешать основной цели обучения — изучению программного материала). Постановка учебных проблем на факультативных и особенно на кружковых занятиях предоставляет учителю широкую возможность варьирования содержания материала (не связывать себя рамками программы), акцентируя внимание на развивающих и воспитывающих функциях задач.

1.2. Предложенная нами в первой части книги трактовка проблемной ситуации и возникающей из нее задачи по своей структуре полностью определяет сущность проблемного обучения. В самом деле, проблемное обучение характеризуется постановкой таких учебных проблем, где один (или несколько) из компонентов проблемной ситуации неизвестен человеку (коллективу учащихся), перед которым эта проблема поставлена.

В дидактике выделяют три основных способа постановки перед учащимися некоторой проблемной ситуации:

а) путем четкой постановки проблемы учителем;

б) путем создания ситуации, в которой от учащегося требуется самому понять ее проблемный характер и сформулировать соответствующие задачи;

в) путем создания ситуации с более или менее четко обозначенной проблемой, но по логике поиска решения которой ученик должен прийти к новой, дополнительной проблеме, им самим выявленной, хотя и предусмотренной учителем при конструировании ситуации[2].

Особо выделяется также и случай, когда в ходе решения

[1] Крыговская С. Развитие математической деятельности и роль задач в этом развитии. — «Математика в школе», 1966, № 6, с. 26.

[2] См.: Лернер Н. Я. Поисковые задачи в обучении как средство развития творческих способностей. — В кн.: Научное творчество. Под ред. С. Р. Микулинского и М. Г. Ярошевского. М., 1969, с. 416.

некоторой задачи ученик самостоятельно обнаруживает новую проблему, не предусмотренную учителем при конструировании данной ситуации.

Каждый из этих способов постановки проблемной ситуации фактически представляет собой тот или иной набор неизвестных компонентов *ACRB* (с количественной или качественной точки зрения). Так, например, первый способ характеризует по существу проблемную ситуацию, в которой четко определены компоненты ситуации *A* и *B*. Второй способ представляет собой ситуацию, в которой эти же компоненты недоопределены (исходя из педагогических соображений) и т. д.

Учебная математическая проблема характеризуется, таким образом, следующими основными условиями: создание проблемной ситуации (постановка задачи с неизвестными элементами, отношениями или свойствами); целевое задание.

Предполагается, что, анализируя проблемную ситуацию, поставленную учителем, учащийся, как правило, не только должен найти способ решения отраженной в ней задачи, но и провести определенное обобщение всей задачной ситуации, сравнить данную ситуацию с какой-либо другой и т. д., т. е. видеть за данной проблемой новую проблему, которую можно и целесообразно было бы изучить.

Характерным для традиционного обучения было то, что изучение нового материала обычно сводилось к объяснению сущности изучаемого вопроса самим учителем и совместному (с учащимися) решению тех задач, которые закрепляли только что полученные знания. Проблемное обучение включает в себя не только постановку вводной задачи (создание проблемной ситуации), но и самостоятельную творческую работу учащихся над данной ситуацией, открытие ими новых свойств, самостоятельное обоснование установленных соотношений.

При проблемном обучении учебная ситуация, как правило, ставится перед школьником в целостном виде, хотя некоторые ее компоненты могут сразу не проявляться (выявление этих компонентов может представлять собой специальное учебное задание). Предполагается, что разрешением поставленной перед ним проблемы учащийся занимается самостоятельно, а помощь ему со стороны учителя имеет тенденцию к некоторому минимуму; учитель только направляет и организует работу и значительно реже наводит на мысль.

Понятно, что в проблемном обучении задачи играют ведущую роль. Пожалуй, нигде так ярко не проявляется сущность обучения через задачи, как в проблемном обучении. При этом задачи проблемного характера могут играть в изучении нового учебного материала как ведущую роль (приводя к постановке урока проблемного типа), так и локальную (служить, например, средством введения новых математических понятий или средством мотивации полезности, необходимости изучения нового материала).

Организация проблемного урока может проходить по следующей методической схеме.

1) Конструирование учителем учебной проблемной ситуации:

а) возбуждение у учащихся интереса к данной проблеме;

б) мотивировка целесообразности (необходимости) ее рассмотрения.

2) Постановка задачи, возникающей из данной проблемы, и четкая ее формулировка.

3) Изучение условий, характеризующих поставленную задачу.

4) Процесс решения поставленной проблемной задачи:

а) обсуждение задачи в целом и в деталях;

б) ориентация в трудностях ее решения, выделение частных задач и последовательности ее решения;

в) разработка возможных направлений решения основной задачи;

г) отбор и воспроизведение известных положений, необходимых для решения задачи, и их систематизация;

д) конкретная реализация намеченного плана решения задачи.

5) Обоснование правильности полученного решения.

6) Исследование решения задачи и обсуждение его результатов; выявление новых знаний.

7) Практическое применение новых знаний при решении специально подобранных учебных задач.

8) Изучение возможных расширений и обобщений решенной задачи и исходной проблемы.

9) Изучение полученного решения задачи и поиск других более экономичных или более изящных способов ее решения.

10) Подведение итогов проделанной работы и выявление главного.

Указанный здесь план действий осуществляется при максимальном участии в его реализации учащихся и минимальном участии в процессе этой деятельности учителя.

Понятно, что данный схематический план организации проблемного урока математики динамичен; в зависимости от конкретной характеристики той или иной учебной проблемы он выполняется полностью или частично, отдельные пункты плана могут объединяться и т. п.

Рассмотрим конкретизацию этого плана на примере урока, посвященного изучению темы «Вписанные четырехугольники».

1. Учитель ставит перед учащимися следующую вводную задачу: «Где расположить штаб пионерской игры «Зарница», чтобы расстояния от него до мест расположения четырех пионерских отрядов были одинаковы?». (Предлагается соответствующий рисунок.)

2. Возникает проблемная ситуация, а из нее проблемная задача о возможности проведения окружности через четыре данные точки (рис. 1). Точками A, B, C и D на рисунке обозначены места расположения отрядов, а точкой O — штаба.

ГОС. НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

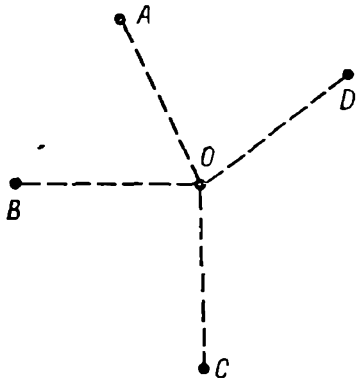


Рис. 1

3. В процессе обсуждения этой проблемной ситуации устанавливается, что множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки на данное расстояние, есть окружность, а потому в соответствии с условием задачи точки A, B, C, D принадлежат окружности, положение центра которой (точки O) неизвестно.

4. Приступив к решению проблемы, учащиеся (с помощью учителя) устанавливают следующие известные им ранее факты, связанные с данной проблемой:

а) если дана одна точка плоскости A, то через эту точку всегда можно провести любое число окружностей (центры их в любых, произвольно выбранных точках);

б) если даны две точки плоскости A и B, то и через эти точки можно провести бесконечное множество окружностей (центры их будут располагаться на медиатрисе отрезка AB);

в) для трех точек, не лежащих на одной прямой, существует единственная окружность, проходящая через эти три точки (теорема о вписанном треугольнике).

Решение предполагает отыскание условий, которым должны удовлетворять четыре точки, чтобы можно было провести окружность, содержащую эти точки. Соединив их отрезками прямых, школьники получают четырехугольник $ABCD$, который должен быть вписан в окружность; начинают изучение его свойств.

Если этот четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 2), то каковы величины внутренних углов этого четырехугольника? Устанавливается, что величина угла A, как вписанного, измеряется $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$; величина угла C, как вписанного, измеряется $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$. Следовательно, сумма величин углов A и C измеряется суммой величин дуг $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$ и $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$, т. е. суммой $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD})$.

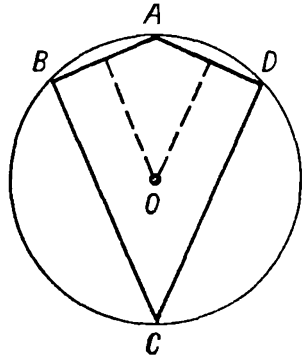


Рис. 2

Сумма величин дуг BCD и BAD равна угловой величине окружности (т. е. $4d$). Следовательно, сумма величин углов A и C равна $2d$. Также показывается, что сумма величин углов B и D равна $2d$.

Подчеркивается, что углы A и C, B и D являются в четырехугольнике $ABCD$ противоположными.

5. В результате решения этой задачи выявляется новое свойство вписан-

ного четырехугольника: «Сумма величин противоположных углов вписанного четырехугольника равна $2d$».

6. Учитель отмечает, что данное утверждение представляет собой теорему, доказательство которой уже проведено в процессе решения.

7. Учитель обращается к классу: «Верно ли утверждение, обратное данному? Сформулируйте, докажите или опровергните его». Учащиеся обосновывают справедливость и этой теоремы, устанавливая тем самым необходимое и достаточное условия для того, чтобы любые четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, принадлежали окружности.

8. Возвращаясь к поставленной конкретной задаче, учитель указывает на то, что остался нерешенным вопрос о нахождении центра этой окружности. Учащиеся вспоминают, как построить центр окружности, проходящей через три заданные точки, и исследуют вопрос о том, применим ли тот же способ для нахождения центра окружности, проходящей через четыре заданные точки (будет ли четвертая точка D принадлежать окружности, центр которой построен по трем данным точкам A, B и C). Учащимся предлагается исследовать вопрос о возможных положениях точки D.

9. Далее им предлагается установить, какие следствия (относительно частных видов четырехугольников) можно усмотреть из этих двух теорем (сформулировать их).

10. Предлагается самостоятельно придумать задачу, где применяются только что изученные теоремы или их следствия, и объяснить ее решение.

11. Могут ли эти теоремы оказаться полезными для решения задачи о возможности проведения окружности через 5, 6 и т. д. произвольных точек плоскости?

12. В качестве закрепления изученного учащимся может быть предложена самостоятельная работа такого, например, содержания:

1) Какая окружность называется описанной около данного четырехугольника?

2) Можно ли описать окружность около четырехугольника, величины углов которого, взятые в последовательном порядке, равны: 90°, 90°, 60°, 120°? (Ответ обосновать.)

3) Найти неизвестные величины углов вписанного в окружность четырехугольника, если известно, что величины двух его углов равны соответственно 32° и 105°.

13. Подводится общий итог работы и дается задание на дом школьникам:

а) ознакомиться с изложением этой темы в учебнике;

б) придумать задачу на доказательство (по изученной теме) и провести само доказательство;

в) исследовать вопрос о том, можно ли вписать окружность в четырехугольник. Каким условиям должен удовлетворять такой четырехугольник?

Приведенный и проиллюстрированный нами структурный план проблемного урока представляет лишь один из возможных вариантов проведения такого урока[1].

Рассмотрим теперь вопрос о том, как используются задачи при реализации локальных целей обучения математике. К числу таких целей, в частности, относятся:

а) мотивация полезности изучения того или иного вопроса;

б) введение новых математических понятий;

в) изучение новых свойств известных математических объектов;

г) установление межпредметных и внутрипредметных связей;

д) установление связей известного учебного материала с новым, систематизация известного учебного материала;

е) ознакомление с новым методом решения задач, сравнение эффективности различных методов решения одной и той же задачи и т. д.

Проиллюстрируем сказанное примерами из собственного опыта использования задач в указанных целях.

а) Приступая к изучению нового учебного материала, следует уделять особое внимание мотивировке целесообразности его изучения.

Так, начиная со школьниками изучение темы «Вычисление объемов и площадей поверхностей геометрических тел (призма и пирамида)», можно поставить задачу, мотивирующую полезность изучения вопроса о площади и объеме пространственных тел.

З а д а ч а. Заводу дан заказ: изготовить бак емкостью 3700 *л*, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, в основании которого прямоугольник размером 1,8 × 1,2 *м*. Сколько квадратных метров оцинкованного железа уйдет на его изготовление? Как изменится емкость бака, если при той же высоте в основании будет квадрат со стороной 1,6 *м*? Как будет меняться емкость бака при изменении формы основания? Будет ли при этом меняться площадь его поверхности?

б) Выступая в качестве эффективного средства введения новых математических понятий, решение задач, помимо ведущих обучающих функций, как правило, одновременно реализует и функции развивающего и воспитывающего характера (формирование у школьников умения сравнивать и обобщать, формирование диалектико-материалистического мировоззрения, установление связей между математикой и другими науками, математикой и жизнью).

Одним из ярких примеров использования задач в этом аспекте является введение посредством задач понятия производной в IX классе. В учебном пособии по математике для IX класса подобные задачи ставятся в основном в целях показать школьникам практическую значимость понятия производной, мотивировать полезность ее изучения. Наряду с этим в большей степени должен быть сделан

[1] См., например: С к у б а н о в и ч В. Идеи проблемного обучения — в практику. — «Народное образование», 1969, № 10, с. 48.

акцент и на том, что в понятии производной обобщаются самые разнообразные технические и физические величины: мгновенная сила тока как величина, характеризующая скорость изменения количества электричества с течением времени; теплоемкость тела при данной температуре как скорость изменения количества тепла при изменении температуры; скорость химической реакции в момент времени как скорость изменения количества вещества, участвующего в этой реакции, с течением времени. Важнейшим является тот факт, что введение всех рассмотренных понятий проводилось с помощью предела особого вида, а именно предела отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Можно привести много других задач, для решения которых также необходимо отыскивать скорость изменения некоторой функции. Например, нахождение концентрации раствора в определенный момент, нахождение расхода жидкости, угловой скорости вращения и т. п. И каждый раз математическим образом того или иного (из названных) понятия является предел такого вида, который называют производной функции. Обилие задач, решение которых связано с отысканием скорости изменения некоторой функции, приводит к необходимости научиться вычислять предел отношения приращения различных функций к вызывающему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, и тем самым к необходимости изучить предел такого вида в общем виде для производной функции.

После введения понятия производной в общем виде, ее определения, символической записи и чтения последней целесообразно вернуться к решению рассмотренных задач (осуществить процесс обратной связи абстрактного с конкретным), рассмотреть интерпретацию этого нового абстрактного понятия для описанных задачами конкретных случаев.

в) Следующий пример иллюстрирует использование задач для изучения новых свойств известных школьникам математических объектов (IV класс).

Проблемная ситуация. Существует бесконечное множество треугольников различных видов. Неизвестно, одинакова или различна сумма величин внутренних углов треугольника.

Проблемная задача. Какова сумма величин внутренних углов треугольника?

Основная проблемная задача может быть представлена следующей системой частных задач проблемного характера.

З а д а ч а 1. Зависит ли сумма величин внутренних углов треугольника от его размеров? Ответ отрицательный. (В ходе решения этой задачи полезно использовать карты одной и той же местности, но разного масштаба или картонные модели двух подобных друг другу треугольников.)

З а д а ч а 2. Зависит ли сумма величины внутренних углов треугольника от его положения? Ответ отрицательный. (В ходе

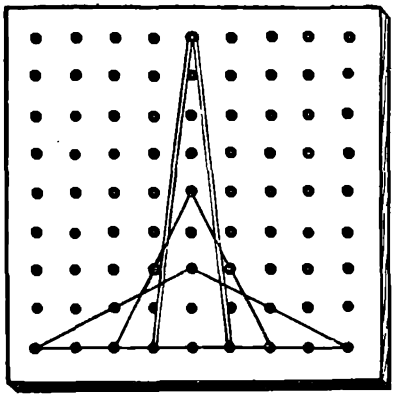


Рис. 3

решения этой задачи полезно непосредственно перемещать картонную модель треугольника по плоскости стола или классной доски.)

З а д а ч а 3. Зависит ли сумма величин внутренних углов треугольника от его формы? Ответ отрицательный. (В ходе решения этой задачи полезно использовать классный или индивидуальный геоплан Карасева — Гаттеньо (рис. 3).)

По итогам решения задач 1—3 делается вывод о постоянном значении этой суммы.

З а д а ч а 4. Чему равна сумма величин внутренних углов треугольника? Ответ: $S = 2d$ — возможная гипотеза. (В ходе решения этой задачи также полезно использовать геоплан, рассмотрев два возможных предельных случая (рис. 4).)

З а д а ч а 5. Правдоподобно ли утверждение: «Сумма величин внутренних углов треугольника равна $2d$»? (В ходе решения этой задачи (рис. 5) полезно использовать транспортир и провести

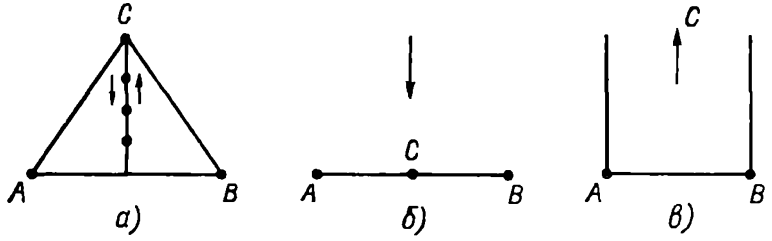


Рис. 4

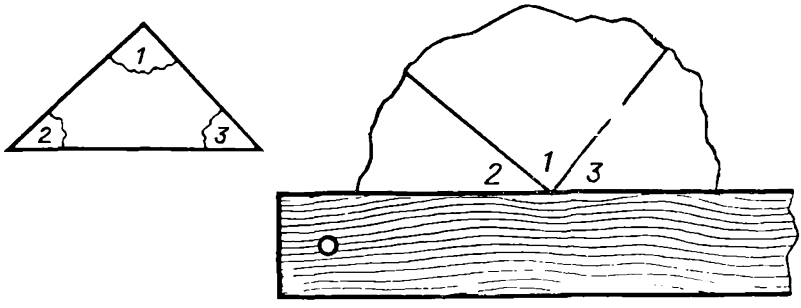


Рис. 5

измерения, а также «оторвать углы» от бумажной модели треугольника и уложить их вдоль одной прямой линейки.)

З а д а ч а 6. Как доказать, что сумма величин внутренних углов треугольника равна $2d$, и как записать это доказательство? (Известный способ доказательства этой теоремы в VI классе как раз и основан на идее укладывания всех трех внутренних углов треугольника в один развернутый угол.)

Заметим, что в зарубежной школе все большее распространение получает обучение математике через задачи, реализуемое на различных дидактических (конкретных или абстрактных) моделях и осуществляемое в форме практических (или лабораторных) работ. Так, исследовательской группой преподавателей Мичиганского университета (США) было разработано специальное методическое пособие для учителей[1], имеющее целью осуществление систематических лабораторных работ в процессе обучения математике.

г) Рассмотрим теперь пример использования задачи в качестве средства установления межпредметных связей, прежде всего математики и физики.

З а д а ч а. Известно, что два проводника с током при последовательном включении в цепь имеют сопротивление a омов, а при параллельном включении — b омов. Можно ли установить сопротивление каждого проводника, если у нас нет омметра?

Рассмотрим решение этой задачи:

1) Пусть сопротивления проводников равны соответственно R_1 и R_2 омов. По условию задачи можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = a \\ \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{b}. \end{cases}$$

2) Преобразуем эту систему, помня, что $R_1 > 0$, $R_2 > 0$:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = a \\ \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = \dfrac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = a \\ R_1 \cdot R_2 = ab. \end{cases}$$

3) Используя теорему Виета, приходим к уравнению $x^2 - ax + ab = 0$, корни которого x_1 и x_2; $x_1 = R_1$, $x_2 = R_2$ или $x_1 = R_2$, $x_2 = R_1$, причем

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a(a-4b)}}{2}, \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a(a-4b)}}{2}.$$

4) Оба корня действительны при условии $a - 4b \geqslant 0$, или $a \geqslant 4b$, или (так как $b > 0$) $\dfrac{a}{b} \geqslant 4$; оба корня являются решением

---

[1] Laboratory manual for Elementary Mathematics. (W. M. Jitrgerald, D. P. Bellamy, P. H. Boonstra, I. W. Jones, W. I. Wosse). Prindle, Weber L. Shmidt. Boston, 1969.

системы, если они положительны; это условие соблюдается, так как $R_1 + R_2 = a > 0$, $R_1 \cdot R_2 = ab > 0$. При $a < 4b$ решений нет.

5) Практический вывод. Общее сопротивление двух параллельных, включенных в сеть проводников уменьшится в 4 раза по сравнению с сопротивлением тех же проводников, включенных последовательно. Используя полученный результат, мы можем с полным основанием утверждать следующее: для того чтобы при параллельном соединении проводники имели сопротивление, например, 0,5 *ом*, необходимо взять два таких проводника, общее сопротивление которых было бы не менее 2 *ом*.

6) Приложение к теории:

а) если заменить $a = R_1 + R_2$ и $\frac{1}{b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, то получаем при $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ неравенство

$$(R_1 + R_2) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \geqslant 4;$$

б) в качестве очевидных решений этой задачи можно также получить неравенства:

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \geqslant 2 \text{ или } K + \frac{1}{K} \geqslant 2 \quad \left(\text{если } \frac{R_1}{R_2} = K\right).$$

Последнее неравенство представляет особый интерес (и богатые приложения), так как вскрывает важное свойство двух взаимообратных чисел.

Итак, в ходе изучения программного материала задачи несут в себе целый комплекс функций обучающего, развивающего и воспитывающего характера в их органическом единстве. Они способствуют:

1) созданию проблемных ситуаций, использующих жизненный опыт учащихся, их интуицию; возможности учащимся самостоятельно поставить опыт, провести соответствующую лабораторную и практическую работу и сделать вывод на основе наблюдения за ее ходом и сравнения ее результатов; полезности (или даже необходимости) изучения нового материала и практической значимости вводимых понятий, естественности их возникновения; использованию наглядных пособий для осмысливания изучаемого и выявления его существенных свойств;

2) воспитанию у учащихся творческого подхода к изучению каждой темы; формированию умений ставить и отвечать на вопросы, явно не рассматриваемые в учебнике или в объяснениях учителя; умений применять полученные знания в ситуациях, не похожих на те, которые рассматривались с учителем; умений находить применение математических знаний при изучении химии, физики, черчения и других учебных предметов;

3) самостоятельности выполнения различных учебных заданий, обучению приемам поиска, исследования и доказательства; формированию способностей к мысленному эксперименту; обучению уча-

щихся основным мыслительным операциям и методам научного познания;

4) формированию умений находить наиболее рациональные пути выполнения поставленных перед ними учебных заданий, используя весь комплекс знаний по математике; воспитанию у учащихся потребности критически оценивать результаты своей работы и умения контролировать их и прогнозировать;

5) формированию навыков правильной организации своего учебного труда; умения самостоятельно работать с учебной литературой;

6) обучению учащихся эффективному использованию математической символики, точности и ясности речи;

7) эффективному использованию технических средств для поддержания познавательной активности школьников в процессе повторения, закрепления необходимого для изучения нового материала.

В заключение отметим, что при постановке в школьном обучении математике специально подобранных задач проблемного характера, целесообразно иметь в виду следующее:

1) выполнение школьниками заданий проблемного характера должно в основном проходить в домашних условиях и в более или менее продолжительный срок (1—2 недели). Только продолжительная самостоятельная работа учащегося над задачей проблемного характера обеспечит обучающую эффективность ее последующего обсуждения в коллективе.

2) Задания проблемного характера должны предполагать возможность различного уровня их решения, различную степень проникновения в проблему, допускать различные степени обобщения и развития.

Опыт многих учителей, проводящих изучение отдельных тем школьного курса математики в проблемной форме, показал, что учащиеся резко меняют свое отношение к учебной деятельности. Приобретая «вкус» к эвристике, учащиеся начинают расценивать работу по готовым указаниям как работу неинтересную и скучную. Наиболее значимыми моментами их учебной деятельности на уроке и в домашних условиях становятся самостоятельные «открытия» того или иного способа решения задачи. Явно возрастает интерес учащихся к тем видам работ, в которых находят применение эвристические методы и приемы.

2. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

2.1. Как уже было отмечено, решение задач (понимаемых в широком смысле) является основным видом математической деятельности учащихся, осуществляемой в ходе школьного обучения. По образному выражению Д. Пойа, решение задач — стержень

преподавания математики. По существу о том же самом говорит и следующее высказывание, характеризующее основную цель математического образования: «Целью (обучения. — *Ю. К.*) является подлинное понимание существа математики как органического целого и как основы научного мышления и образа действий»[1].

В традиционном обучении математике школьники, как правило, имели дело лишь с задачами, формирующими у них определенные операционные навыки по данному образцу-стандарту или иллюстрирующими то или иное теоретическое положение (формулу, теорему, правило). Довольно часто это приводило к тому, что при встрече даже со стандартными задачами, решаемыми по известному учащемуся правилу, он оказывался беспомощным, если эта задача выражалась в непривычной для него форме. Так, многие выпускники школ заявляли, что они не могут решить уравнение вида $2^{\log_2(x^2-x-17)}=11$, так как подобных уравнений они не решали. Встречаясь же с нестандартной задачей (олимпиадного характера), учащиеся часто не знают, как ее решать, не делая даже попыток отыскать это решение. И только неоднократное участие в математических олимпиадах, понимание того факта, что нестандартность задачи не означает ее недоступности для решения, накопление опыта в общих приемах решения задач позволяет некоторым школьникам решать их успешно.

Нестандартная задача — это задача, решение которой для данного ученика не является известной цепью известных действий. Уже было отмечено, что понятие нестандартной задачи относительно. Успех в решении зависит не только от того (и даже не столько от того), решались ли раньше подобные задачи, сколько от опыта их решения вообще, причем решения неформального (до получения верного результата), но и от числа полностью разобранных решений, проанализированных с целью выявить все интересные аспекты, все поучительные качества данной задачи. И хотя Д. Пойа придает немалое значение безуспешным попыткам найти решение задачи, следует помнить, что нерешенная задача, особенно в школьном возрасте, отнюдь не вызывает у учащихся уверенности в своих силах и нередко отрицательно влияет на развитие интереса к решению задач вообще. Поэтому очень важно, особенно поначалу, чтобы поставленные перед школьниками нестандартные задачи в конце концов были ими успешно решены. Позже школьникам могут быть предложены задачи, не имеющие однозначного ответа на заключенный в них вопрос, или такие, решение которых приводит к возникновению новой задачи; поначалу же нестандартные задачи должны иметь законченную форму, быть хорошо определенными. И конечно же, от учителя зависит, чтобы учащиеся пришли сами к решению или по крайней мере оно было бы «прочувствовано» ими, так как «...простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвое-

[1] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М., 1967, с. 7.

ны творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно»[1]. Но вместе с тем решение нестандартных задач лишь с помощью учителя — это вовсе не то, чего следует добиваться. Цель постановки в школе нестандартных задач — научить школьников решать их самостоятельно. Уметь решать нестандартные задачи — это не значит, как часто думают школьники, почти мгновенно находить решение любой из них.

В умение решать нестандартные задачи входят моральные качества: настойчивость, терпение, воля к победе, которые должны появиться у учащихся в процессе обучения. И конечно же, в умение решать нестандартные задачи входят:

а) знание методов решения; знание так называемых эвристических приемов и умение изобретать новые методы и приемы решения; сознательное владение основными мыслительными операциями;

б) умение отбирать полезную информацию, т. е. пополнять число уже известных методов решения, видеть в задаче главное и второстепенное, выполнять только целесообразные действия, обнаруживать в данной задаче серию новых возможных задач и многое другое.

Следует подчеркнуть, что, овладев общими методами и приемами, часто приводящими к решению задач, мы вовсе не превращаем эти задачи в стандартные, так как метод в корне отличен от алгоритмов, которым решаются стандартные задачи. Встречая стандартную задачу и применяя к ее решению известную ему цепь действий, человек рассуждает примерно так: я знаю, как это сделать, и если мои действия не приводят к желаемому результату, то мной была допущена техническая ошибка. Применяя же какой-либо метод при решении нестандартной задачи, мы можем лишь надеяться на получение результата (так как этот метод помогал нам и раньше). И если результат не получен, то либо предполагаемый ход решения не был верен, либо следовало применить какой-либо другой (возможно, и неизвестный нам) метод.

Современное состояние науки, техники, народного хозяйства требует применения математики к решению большого числа разнообразных задач, нестандартных по своей форме и содержанию. Поэтому и важно приучать учащихся к применению общих приемов поиска решения задач, пригодных к любым, в том числе и нестандартным, «нетиповым» задачам.

Нельзя сказать, чтобы учащиеся не прибегали к эвристическим приемам при решении задач или при доказательстве теорем. Однако они пользуются ими обычно несознательно. Осознанное применение этих приемов давало бы во много раз больший эффект.

Рассмотрим пример яркого проявления способности мыслить интуитивно, проявленной одним из учащихся X класса. На уроке рассматривался вопрос об обосновании известной формулы площади

[1] Колмогоров А. Н. О профессии математика. М., 1960, с. 3.

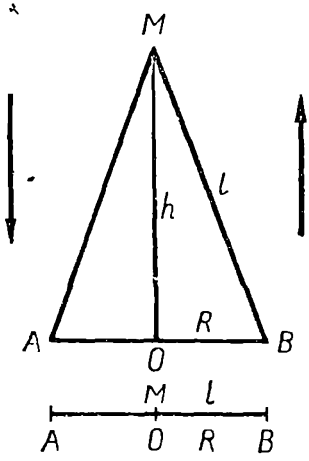


Рис. 6

боковой поверхности конуса — $S_{б.} = \pi Rl$. Школьником было предложено следующее «доказательство» (рис. 6).

1) Пусть $h \to 0$, тогда образующая конуса $l \to R$ (и в предельном случае совпадает с радиусом: $l = R$). При этом боковая поверхность конуса обратится в круг, который «наложится» на круг основания ($S_{б.\ кон} \to S_{круга}$).

2) Известно, что $S_{круга} = \pi R^2$. Будем теперь увеличивать высоту конуса от нулевого значения до некоторого значения h (из точки к отрезку); тогда один из радиусов основания (бывшая образующая) снова станет образующей, а другой (радиус круга основания) останется на месте: $R_1 \to l$, $R_2 = \text{const}$.

3) До изменения (в предельном случае): $S_{б.\ кон} = S_{круга} = \pi R^2 = \pi R \cdot R$; в результате изменения геометрической ситуации соответственно изменится и формула площади: было $S = \pi R \cdot R$; стало $S = \pi R \cdot l$.

Понятно, что приведенное доказательство явно некорректно; однако проявленная школьником геометрическая интуиция похвальна.

Характерная для интуиции свернутость мыслительных операций, тесно связанная со способностью к обобщению, часто имеет место при решении школьниками нестандартных задач.

Известный советский психолог З. И. Калмыкова разработала весьма интересный критерий выявления этой способности, основанный на так называемом коэффициенте экономичности[1]. Под коэффициентом экономичности З. И. Калмыкова понимает отношение числа умозаключений, фактически имевших место при решении некоторой задачи, к числу всех умозаключений, логически необходимых для ее решения.

Несмотря на важность постановки нестандартных задач в школьном курсе математики, проводить систематическое обучение их решению на уроках почти невозможно хотя бы потому, что на это не хватит учебного времени. Понятно, что решение нестандартных задач остается пока уделом внеклассных занятий. Вместе с тем обучать некоторым методам и приемам их решения можно (и полезно) на уроке, например при введении задач нового типа (когда такие задачи еще не перешли в разряд стандартных) или при введении нового материала проблемным путем.

[1] См.: Калмыкова З. И. Методика диагностики обучаемости школьников (на материале физики). — В сб.: Проблемы диагностики умственного развития учащихся. М., 1975, с. 47—55.

Если говорить о традиционном обучении математике, то в ходе его слишком много уделялось внимания (это определялось и программой, и методикой, и, наконец, подбором самих задач) жестко запрограммированной деятельности. В ходе традиционного обучения учащиеся занимались решением таких задач, для которых их решение на ЭВМ не потребовало бы сколько-нибудь серьезных усилий. Неудача в их решении могла быть вызвана только одной причиной — забыванием какого-либо звена известного им алгоритма (или непониманием такового). Правда, случалось, что способный учащийся, забывший сообщенный ему учителем алгоритм решения некоторой задачи, изобретал свой метод решения (или «открывал» этот алгоритм заново), но такого рода эвристическая деятельность (не говоря уже о специальном обучении школьников этой деятельности) встречалась на практике чрезвычайно редко.

С введением в школьное обучение математике новых идей и нового содержания положение дел изменилось к лучшему. Однако в этом направлении сделаны еще только первые шаги; обучение школьников эвристической деятельности еще не стало ни систематическим, ни целенаправленным. И если для исследований в области искусственного разума характерным является положение о том, что большинство встречающихся задач решается эвристически и только в отдельных случаях для решения той или иной задачи удается использовать как алгоритмы, так и эвристики, то для школьного обучения математике (для воспитания естественного интеллекта) до сих пор характерно обратное: подавляющее большинство школьных математических задач решается посредством того или иного алгоритма; лишь для очень малого их числа можно использовать эвристики. Если учесть, что в высказываниях кибернетиков речь идет о характеристике задач, наиболее часто встречающихся современному человеку, станет ясно, что подготовка учащихся в ходе обучения математике недостаточно ориентирована на будущую их производственную деятельность.

Если принять в качестве определяющего следующее положение: «...мышление реально осуществляется как решение задач. Решение задач — это непосредственно наблюдаемая деятельность мышления...»[1], то становится ясным, что, умея управлять процессом решения задач, обучая школьников общим приемам решения, мы будем способствовать реализации одной из основных проблем математического образования — формированию у учащихся математического мышления.

2.2. Решение каждой математической задачи осуществляется, вообще говоря, по четырем основным этапам:

1) Понимание условия и требования цели задачи; ясное усвоение и разработка отдельных элементов условия (или элементов цели).

---

[1] Славская К. А. Детерминация процесса мышления. — В сб.: Исследования мышления в советской психологии. М., 1966, с. 210.

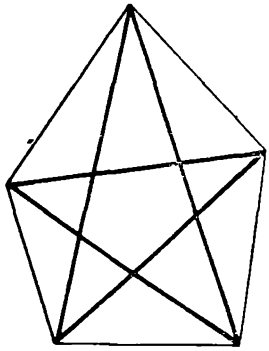


Рис. 7

2) Составление плана решения.

3) Практическая реализация плана во всех его деталях.

4) Окончательное рассмотрение задачи и ее решения с целью усвоения тех моментов, которые могут стать полезными для дальнейшего решения задач.

В целях выявления характера основных трудностей, возникающих у школьников при решении ими нестандартных задач, а также с целью выяснения, на каком этапе они возникают, учащимся восьмых классов были предложены две такие задачи (одна более трудная, другая — легкая).

З а д а ч а 1. На плоскости даны пять точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Каждые две из этих точек соединены «красным» или «синим» отрезком (на чертеже обозначены линиями разной толщины). При этом три отрезка не должны образовывать треугольника со сторонами одного цвета. Доказать, что:

1) из каждой точки выходят два «красных» и два «синих» отрезка;

2) «красные» или «синие» отрезки образуют замкнутую ломаную линию, проходящую через все эти точки.

Для решения этой задачи достаточно было убедиться, что из одной точки не могут выходить три одноцветных отрезка (в противном случае сразу возникает одноцветный треугольник). Далее оставалось шаг за шагом провести последовательное соединение данных точек отрезками, отбрасывая или принимая одну из двух возможных альтернатив в соответствии с условием задачи.

Только 10% учащихся сумели частично провести начало решения (указали, без обоснования, на невозможность выхода из точки трех одноцветных отрезков). Затем эти учащиеся (и 85% других) лишь изобразили возможную ситуацию на рисунке (из них 70% учащихся изобразили ситуацию, указанную на рис. 7, и 15% — на рис. 8). Большинство учащихся использовали утверждения, которые требовалось доказать в качестве средства для изображения соответствующей условию ситуации, и посчитали задачу решенной.

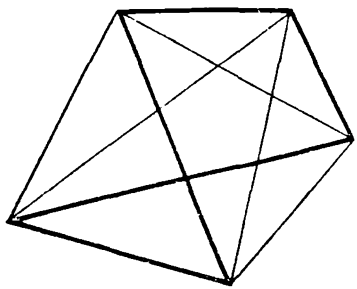


Рис. 8

Весьма показательны результаты решения теми же учащимися второй задачи.

З а д а ч а 2. При проведении командных соревнований по шашкам между двумя пятыми классами были выделены команды по 4 человека и было решено, что каждый ученик сыграет с каждым один раз. Однако в день соревнований один из участни-

ков заболел и в команде VБ класса оказалось 3 человека. Тем не менее соревнование было проведено. Сколько партий было сыграно? Указать их.

Только 10% из 243 учащихся решили эту простую задачу верно, остальные не выявили важную часть условия о том, что речь идет о командных соревнованиях. Это привело их к неверному ответу на вопрос задачи. Интересно отметить, что 85% учащихся использовали в ходе решения задачи иллюстративную граф-схему, а не вычисления, основанные на логическом рассуждении, обнаружив склонность к наглядному изображению задачной ситуации.

Приведенный эксперимент показал, что основными причинами возникших трудностей при решении задачи явились следующие:

а) неумение осознать условие задачи, четко выделив в нем данное и искомое;

б) сильное влияние психологической инерции на этапе поиска решения, выражающееся в стремлении применить к решению любой задачи какой-либо из готовых способов решения (алгоритмов);

в) неумение критически оценивать гипотезы даже простым соотнесением гипотезы с условием (привычка работать над первой из возникших в уме гипотез);

г) невысокая логическая культура.

Проиллюстрируем на примерах важнейшие аспекты конкретной методики обучения учащихся решению задач.

Учащимся следует продемонстрировать действенность наглядного и четкого чертежа на примерах.

З а д а ч а 1. Покажите, что шесть достаточно круглых, неотточенных карандашей можно расположить так, чтобы любые два из них прилегали (касались) друг к другу.

Оформление соответствующей условию схемы сразу приводит к решению (рис. 9).

З а д а ч а 2. Ходжа Насреддин расплачивался за ночлег в харчевне с ее хозяином ежедневно одним звеном золотой цепочки из семи одинаковых звеньев. Чтобы не терять лишнее золото при

Дни	Отдал n-е звено	Получил m-е звено
1	$n = 5$	—
2	$n = 6; 7$	$m = 5$
3	$n = 5$	—
4	$n = 1; 2; 3; 4$	$m = 5; 6; 7$
5	$n = 5$	—
6	$n = 6; 7$	$m = 5$
7	$n = 5$	—

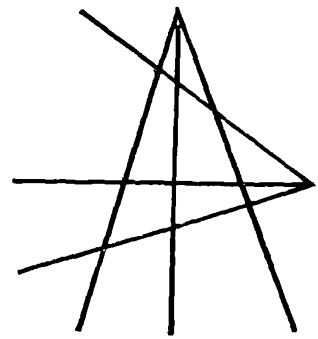


Рис. 9

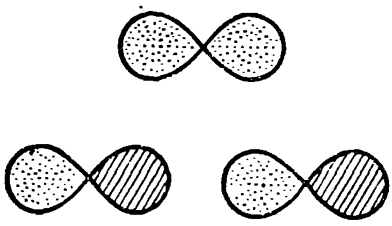


Рис. 10

распиливании, хозяин постав Ходже условие: распилить толь одно звено цепочки. Ходжа Н реддин с этим условием согласи ся и сумел его выполнить. Как это сделал?

Решение возникает при офор лении таблицы, отражающей ловие задачи.

З а д а ч а 3. Хотят поскор поджарить три ломтика бул На сковороде умещаются лишь два ломтика, причем на поджари ние одной стороны затрачивается 1 минута. За какое наименьш число минут можно поджарить с обеих сторон три ломтика бул

Это известная задача, решение которой требует отказать от привычной последовательности соответствующих действий, к торая такова: поджаривают с двух сторон два ломтика (2 минут и потом с двух сторон третий ломтик (еще 2 минуты). Решение : данной задачи — 3 минуты, и для того чтобы прийти к нему, ну но догадаться, как поджаривать ломтики.

Одна из учениц VII класса (школа № 406) решила задачу, п пользуя наглядную схему (рис. 10): по 2 стороны каждого ломтик всего 6 сторон; на сковороде умещаются два ломтика, значит, поджаривание нужно 3 минуты. Порядок поджаривания находит также из чертежа: две стороны одного ломтика не могут находить на сковороде одновременно.

Следует всячески побуждать школьников к тщательному и гр мотному выполнению чертежей, рисунков и схем в соответств с условием задачи. Многие ошибки учащихся объясняются негр мотностью выполненного ими чертежа (например, произвольно б рутся те элементы фигуры, которые однозначно определены други данными элементами этой фигуры). Следует предостеречь учащи ся от сведения общих случаев к частным (например, когда вмес произвольного треугольника выполняется чертеж равностороннe треугольника), так как в результате несоблюдения этого требов ния можно прийти к ложным выводам. Полезно хорошо продума расположение всех элементов на эскизе чертежа; полезно перем щать отдельные элементы фигуры, рассматривая ее в новом пол жении. В противном случае также нередки ложные выводы. Н п р и м е р. В данной правильной треугольной призме ребра равн a. Найти площадь сечения, проведенного через сторону основ ния под углом 60° к плоскости основания.

Нередко учащиеся выполняют чертеж, указанный на рис. 1 и сразу получают ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Однако и сам чертеж и, конечн результат неверны: в сечении получается трапеция. Эта задач интересна и тем, что иллюстрирует в себе целесообразность проведени на этапе изучения условия задачи предварительного исследовани

(прежде чем строить данное сечение, нужно было хотя бы грубо прикинуть, как оно будет выглядеть, учитывая условие данной задачи).

Следует также отметить и проиллюстрировать школьникам важную роль четких символических обозначений данных условий или изображения условия схематически. Показательна в этом отношении известная задача-шутка.

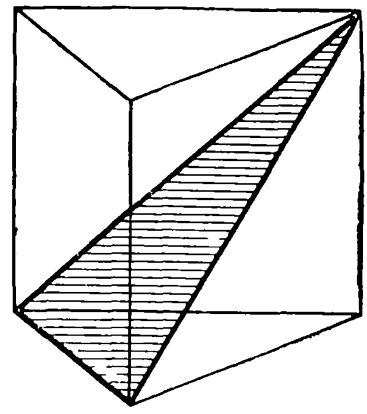


Рис. 11

З а д а ч а 4. По дороге шли два отца, два сына и дедушка с внуком. Сколько человек шло по дороге?

Условие, оформленное с применением символики, сразу приводит к возможному решению:

$$\{д;\ о\} \cup \{о;\ с\} \cup \{д;\ с\} = \{д;\ о;\ с\}.$$

При объединении множеств с общими элементами каждый элемент берется во множестве-результате только один раз. Условие той же задачи, оформленное с помощью графа, также сразу приводит к этому решению (рис. 12).

Следующим важнейшим аспектом изучения условия задачи является тщательное изучение и осмысливание требования (цели) задачи. Сказанное можно выразить следующим эвристическим правилом: «изучи цель, поставленную задачей. Не начинай решение вслепую. Выбери направления поиска плана решения, руководствуясь целью задачи».

Мы видим, что цель задачи выступает как главный ориентир направления поиска решения. Понятно поэтому, что изучению цели следует посвящать не меньше внимания, чем изучению условия; полезно детально изучать (анализировать) цель.

Полезность проведения анализа цели особенно отчетливо можно

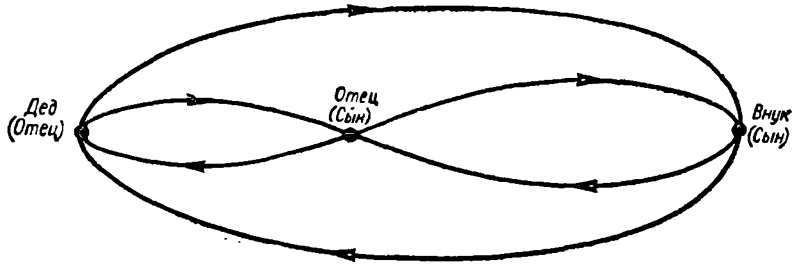


Рис. 12

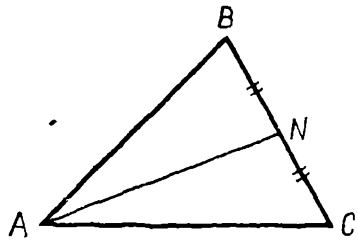


Рис. 13

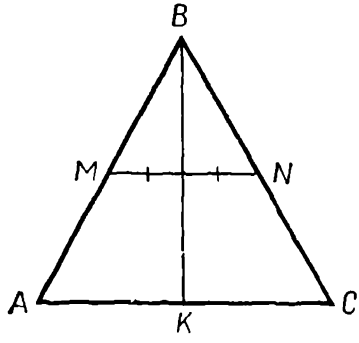


Рис. 14

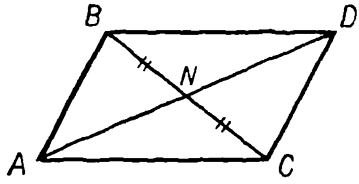


Рис. 15

проследить на решении геометрических задач. Можно предложить учащимся понаблюдать за поиском учителя плана решения следующей задачи.

Задача 5. Построить треугольник ABC по двум сторонам $[AB]$ и $[AC]$ и медиане стороны $[BC]$ (m_a).

Изучим цель, представим требуемую ситуацию (рис. 13). Выделим на рисунке известные элементы. Если бы мы сумели построить какую-либо часть треугольника ACB, которая определила бы весь треугольник в целом, задача была бы решена. Нужно найти этот определяющий элемент треугольника. Например, в равнобедренном треугольнике ABC таким определяющим элементом является треугольник BKC или треугольник BMN. Имея треугольник BKC (или треугольник BMN) построенным, легко построить и треугольник ABC (рис. 14).

Уже на этапе изучения условия задачи бывает полезно дополнить (расширить), видоизменить требуемую ситуацию, найти новые сочетания данных и неизвестных элементов. Такова видоизмененная требуемая ситуация (рис. 15). Продолжим $[AN)$ так, чтобы $|ND| = |AN|$. Проведем $[BD]$ и $[DC]$. Возникла новая ситуация — параллелограмм. Можно ли его построить? Конечно, так как можно построить определяющий его треугольник ADC $[AC]$, $[DC] \cong [AB]$, $[AC]$, $|AC| = 2m_a$. Но тогда план решения задачи ясен.

Итак, анализ цели и связанные с ним видоизменения требуемой ситуации могут значительно облегчить поиски плана решения задачи.

2.3. В процессе изучения и продумывания условия задачи берет свое начало следующий важный этап — поиск плана решения.

Успешное ее решение во многом зависит от целенаправленности такого поиска, т. е. сознательного ограничения числа пробных действий (мысленных или практических), характерных для начальной стадии решения задачи.

Иногда учащиеся не в состоянии самостоятельно проанализировать и решить задачу. Но учителю не следует в этом случае сооб-

щать готовое решение, а тем более заставлять школьника заучить данный в готовом виде способ действия. Однако, указывая учащимся на узловые звенья анализа задачи, которые могут быть использованы ими для дальнейшего поиска, учитель сможет, таким образом, сдвинуть их мышление с «мертвой точки», побудить школьников к самостоятельной мыслительной деятельности. Одним из весьма полезных приемов обучения целенаправленному поиску решения является метод вопросов, разработанный Д. Пойа в книге «Как решать задачу»[1]. Вот вкратце суть этого приема. После того как изучено условие задачи, несколькими вопросами учитель проверяет, понятно ли школьникам ее содержание, и просит их высказать свои предложения о возможных путях решения. Если ни одна из предложенных учащимися идей не является плодотворной, тщательно подобранными вопросами учитель направляет ход мыслей учеников в нужное русло. В общепринятой терминологии этот прием называется приемом подсказки. Система подсказок, состоящая из вспомогательных задач, вопросов, придает мышлению школьника нужное направление, т. е. делает поиск решения задачи целенаправленным.

Полезность упорядочения поисковой деятельности следует продемонстрировать школьникам на эффектно подобранной задаче и ее решении. Вот одна из таких задач.

З а д а ч а 6. Представьте себе, — говорит учитель, — что ваш друг задумал некоторое натуральное число в промежутке от 1 до 1000. Чтобы угадать задуманное число, вы будете отвечать на вопросы *да* и *нет*. Может показаться невероятным, что достаточно всего десяти вопросов, чтобы наверняка отгадать любые задуманные натуральные числа в промежутке от 1 до 1000.

Пусть задуманное число —1. Спрашиваем:

1) Задуманное число больше 512 (половина промежутка 1024)?— Нет.

2) Оно больше 256? — Нет.

3) Оно больше 128 (половина того промежутка, в каком оно может быть)? — Нет.

4) Оно больше 64? — Нет.

5) Оно больше 32? — Нет.

6) Оно больше 16? — Нет.

7) Оно больше 8? — Нет.

8) Оно больше 4? — Нет.

9) Оно больше 2? — Нет.

10) Это число 1? — Да.

Целенаправленно уменьшая область поисков, удается решить эту задачу быстро и просто. Можно теперь предложить учащимся решить ее самостоятельно, в предположении, что задумано число 720. Можно предложить соседу по парте задумать число и найти его.

---

[1] П о й а Д. Как решать задачу. М., 1961, с. 29—31.

Метод указаний позволяет учащимся успешнее и быстрее решить предложенную задачу, но применение его методически обосновано лишь тогда, когда есть твердая уверенность в его полезности. Необходимо, чтобы естественное стремление учащихся к самостоятельным действиям побудило их самих выяснить различные *почему* и *как*. Приведем следующий пример:

Задача 8. Какая из дробей больше: $\frac{555}{777}$ или $\frac{555\,555}{777\,777}$?

После нескольких предположений, высказанных школьниками, большинство из которых сводилось к тому, то первая дробь больше, учитель просто предложил учащимся умножить числитель и знаменатель первой дроби на 1001. Как только было осознано равенство дробей, прозвучал вопрос одного из учащихся: «Как же вы догадались, что умножать надо на 1001?»

Возник следующий диалог между учителем и учениками:

Учитель. Как вы вообще сравниваете дроби?

Учащиеся. Приводим к общему знаменателю и сравниваем числители.

Учитель. А как же в данном случае можно привести дроби к общему знаменателю?

После недолгого молчания последовало радостное «Ну да!», что, по-видимому, означало, что само решение задачи и, главное, как оно получено, полностью осознано учениками. Заметим, что предложенная задача была для учащихся нестандартной скорее по форме, чем по существу, так как допускала решение (правда, более длинное) известным учащимся способом. Ее нестандартность проявилась в редко применяемом способе приведения дробей к *03* (умножением числителя и знаменателя дроби на одно и то же число). Понятно, что был возможен и другой путь решения (другое указание): сократить данные дроби.

Если задача такова, что в ходе ее решения предстоит сделать слишком много указаний, то полезнее применить прием разбора готового решения. Начать следует с того же — предложить задачу и дать учащимся время для ее обдумывания. Если в течение некоторого времени ни у кого из школьников не возникает более или менее плодотворной идеи, записывается готовое решение задачи без каких-либо комментариев и без обоснования (по его основным этапам). Затем решение разбирается, анализируется и обосновывается самими школьниками под руководством учителя.

Приведем пример разбора готового решения следующей задачи:

Задача 9. Доказать, что число $N = n^6 + 34n^4 + n^2$ делится на 36 при любом натуральном n.

На доске (или заранее заготовленном плакате) воспроизводится ее решение.

$$N = n^6 + 34n^4 + n^2 = n^6 - 2n^4 + n^2 + 36n^4 = n^2(n^2 - 1)^2 + 36n^4 = \\ = (n-1)^2 n^2 (n+1)^2 + 36n^4.$$

Далее устно устанавливается, что из трех последовательных натуральных чисел $n - 1$, n, $n + 1$ одно делится на 2, одно — на 3, тогда произведение $(n - 1)^2 n^2 (n + 1)^2$ делится на $2^2 \cdot 3^2 = 36$. Таким образом, число N делится на 36.

Если учащиеся действительно заинтересованы решением этой задачи, они обязательно зададут вопрос: «Как догадаться, что нужно в выражении вычесть и прибавить $2n^4$?» Этот прием является, пожалуй, ключевым при решении многих задач на делимость или на разложение на множители (часто нужно что-то прибавить и это же вычесть, чтобы получить нужный результат). Данный прием является своеобразной эвристикой. Вместе с учащимися полезно провести следующее рассуждение, которым мог бы сопровождаться поиск решения этой задачи.

Чтобы N делилось на 36, надо, чтобы N делилось на $6 \cdot 6$ или на 2^2 и 3^2.

Известно, что из двух последовательных натуральных чисел одно делится на 2, а из трех — одно делится на 3. Можно предположить, что $A_1 = (a - 2)^2 (a - 1)^2 a^2$, $A_2 = (a - 1)^2 a^2 (a + 1)^2$, $A_3 = a^2 (a + 1)^2 (a + 2)^2$. Производя указанные действия, получим для A_1 и A_3 довольно сложные выражения, например $A_3 = a^6 + 6a^5 + 13a^4 + 12a^3 + 4a^2$. Маловероятно, что N можно просто привести к A_1 или A_3. Вид A_2 много проще: $A_2 = a^6 - 2a^4 + a^2$. Он подсказывает идею о том, что выражение $N = n^6 + 34n^4 + n^2$ нетрудно преобразовать к виду $N = n^6 - 2n^4 + n^2 + 36n^4$.

В ходе этого рассуждения возникает ответ и еще на один возможный вопрос: «Почему $n^2 (n - 1)^2$ нужно представить именно в виде $(n - 1)^2 n^2 (n + 1)^2$?»

Поиск плана решения многих задач требует наличия у школьников так называемых комбинационных способностей, под которыми понимают умение сделать подходящий выбор в условиях избытка активных и пассивных знаний. Понятно, что поиск и отбор полезной для решения данной задачи информации также должен быть целенаправленным. Нередко этот выбор может быть легко осуществлен при обращении к подходящей аналогии.

При первой же возникшей трудности, связанной с решением некоторой задачи, учащийся должен спросить себя, как он (или другие) ранее преодолевал подобные трудности, как можно использовать имеющийся у него опыт в новых условиях.

Отыскание подходящих аналогий активизируется вопросами: «Где мы раньше встречали что-либо подобное, видели что-либо родственное, встречали похожие с данными свойства?» Для простоты отыскания аналогии полезно применять сравнительные чертежи, вспомогательные формулировки.

Так, например, имея дело с задачей о нахождении множества всех точек, равноотстоящих (на расстояние a) от заданной плоскости, учащимся напоминают, что задачу, подобную данной, они решали в курсе планиметрии: «Найти множество всех точек плоско-

сти, равноотстоящих от заданной на этой плоскости прямой». Зная, что искомое множество точек представляли две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на данное расстояние a, и рассуждая по аналогии, нетрудно усмотреть, что искомым множеством точек в пространстве будут две плоскости, параллельные данной плоскости и отстоящие от нее на расстояние a.

Аналогия может оказаться полезной и на начальном этапе решения, если уже на этом этапе удается сравнить данную задачу с задачами, уже решенными ранее. Установление сходства условий, требований, способов решения и т. д. между задачей, известной учащимся, и задачей, которую предстоит решить, сразу наталкивает учащихся на плодотворные идеи при планировании ее решения. В процессе ее решения часто оказывается полезным определенное видоизменение условия хотя бы и для того, чтобы была видна аналогия или найден путь обобщения. «*Видоизменяя задачу*, мы вносим новые моменты и, таким образом, создаем новые связи, новые возможности воскресить в нашей памяти все, что имеет отношение к нашей задаче»[1].

Одним из известных способов видоизменения задачи является так называемое возвращение к определениям. При этом используются, конечно, не только сами определения понятий, но и вытекающие из них свойства этих понятий.

Приведем характерный тому пример. Группе учащихся девятых классов была предложена следующая задача.

З а д а ч а 10. Вычислить $\sqrt{\underbrace{0{,}999\ldots99}_{100\text{ раз}}}$ со 100 знаками после запятой.

Решение, на которое школьникам был отведен недельный срок, так и не было ими получено. Все решавшие эту задачу пытались извлечь корень по известному алгоритму и получали девятки после нуля. Многим было интуитивно ясно, что все 100 цифр будут девятками, но никто из учащихся так и не смог этот факт обосновать.

В то же время решение данной задачи почти тривиально. В самом деле, если использовать определение квадратного корня из числа и свойство $a^2 < a$ (при a дробном, меньшем 1), нетрудно усмотреть следующее: искомое число меньше 1, как значение корня из дроби (так как при возведении этого числа в квадрат производится умножение правильных дробей, квадрат произведения меньше самого произведения).

Составив неравенство:

$$\underbrace{0{,}999\ldots99}_{100} < \sqrt{\underbrace{0{,}999\ldots99}_{100}} < 1,$$

получаем искомое число (с требуемой степенью точности)

$$\underbrace{0{,}999\ldots99}_{100}.$$

[1] П о й а Д. Как решать задачу. М., 1961, с. 55.

В процессе решения этой задачи был использован еще один способ видоизменения задачи — разложение условия задачи на элементы и составление новых комбинаций этих (и, может быть, каких-либо других) элементов. Более ярко этот прием можно проиллюстрировать на следующем примере.

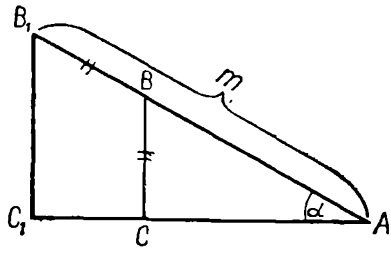


Рис. 16

З а д а ч а 11. Построить прямоугольный треугольник ABC по острому углу α, сумме m гипотенузы и катета, противолежащего углу α.

Уже первые попытки решить эту задачу показывают, что по данным элементам легко строится не искомый треугольник ABC, а иной — $\triangle AB_1C_1$, в котором $|AB_1| = m$, $\widehat{B_1AC_1} = \alpha$, подобный данному (рис. 16). Изучая полученный в ходе анализа результат, усматриваем, что $[BC] \cong [BB_1]$ и $\widehat{BCA} = 90°$. Искомый треугольник будет построен, если удастся построить центр окружности B радиуса BB_1. Так возникает новая задача — результат новой комбинации элементов, участвующих в решении данной задачи.

З а д а ч а 12. Построить окружность с центром на данной прямой (1), проходящую через точку на этой же прямой (2) и касающуюся другой данной прямой (3).

Некоторое видоизменение условия последней задачи приводит к новой более близкой данной.

З а д а ч а 13. На стороне угла найти точку, равноудаленную от точки, данной на той же стороне угла и от другой стороны угла.

Эта задача лучше предыдущей. В самом деле, при решении задачи 12 условие (2) плохо сочетается с условиями (1) и (3), удовлетворить которым нетрудно. Последняя же задача позволяет представить отрезки BC и BB_1 не как радиусы окружности, а в новом качестве — как стороны некоторого равнобедренного треугольника. Нужное дополнительное построение очевидно $[B_1C]$.

Будучи основанием $\triangle CBB_1$, отрезок B_1C является к тому же биссектрисой $\angle BB_1C$ (рис. 17), в чем убедиться несложно.

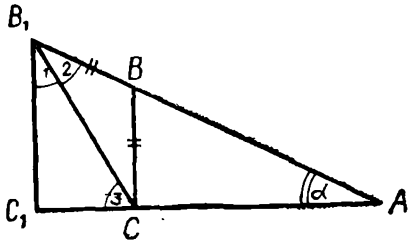


Рис. 17

Решение многих математических задач сводится к решению некоторых частных задач; последние, в свою очередь, разбиваются на более простые, решение которых или постулируется (например, в задачах на

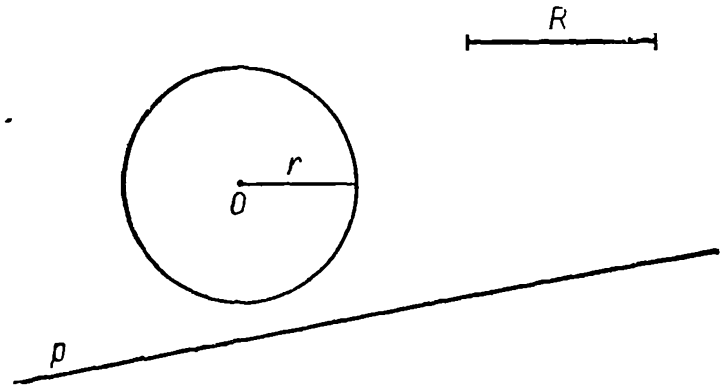


Рис. 18

построение), или известно, или очевидно. Возникновение новых задач в ходе решения данной обычно происходит на стадии поиска.

Так как разбиение данной задачи на серию вспомогательных является одним из важных эвристических приемов, то учащихся следует обучить использовать этот прием сознательно.

Начать можно с некоторых задач на построение, для которых этот прием является весьма эффективным, например с рассмотрения следующей задачи.

З а д а ч а 14. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и данной окружности.

Учитель (совместно с учащимися) может начать процесс ее решения так:

Разберемся в условии задачи. Данная ситуация изображена на рис. 18; требуемая ситуация на рис. 19.

Из условия этой задачи легко обнаружить, что требуемая ситуация должна удовлетворять двум условиям:

1) искомая окружность должна касаться данной прямой p;

2) искомая окружность должна касаться данной окружности $O\,(r)$.

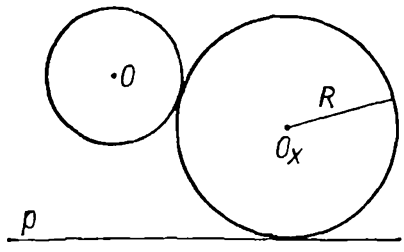


Рис. 19

Теперь нетрудно составить две задачи, родственные данной (назовем их подзадачами).

З а д а ч а 14 а. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой.

З а д а ч а 14 б. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности.

Каждая из этих подзадач решается довольно легко.

Р е ш е н и е 14 а. Чтобы окружность данного радиуса касалась данной прямой, ее центр должен находиться на расстоянии радиуса от прямой.

Мы видим, что таких центров может быть бесконечное множество; каждый из них находится на прямой, параллельной данной и удаленной от нее на расстояния радиуса R. Построим эту прямую центров (даже две прямые a и b, обладающие этим свойством) (рис. 20). Сколько решений имеет подзадача 14 а?

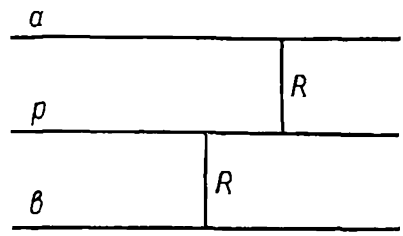


Рис. 20

Р е ш е н и е 14 б. Чтобы окружность данного радиуса касалась данной окружности, ее центр должен находиться от контура данной окружности на расстоянии, равном R.

Мы видим, что таких центров может быть бесконечное множество; каждый из них лежит на окружности с центром O и радиусом, равным $R + r$, где r — радиус данной окружности ($R > r$). Построим эту окружность центров (рис. 21). Сколько решений имеет подзадача 14 б?

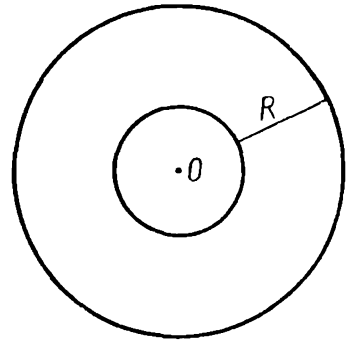


Рис. 21

Теперь можно перейти к решению нашей задачи: здесь оба требования должны соблюдаться одновременно. Но тогда центр искомой окружности должен находиться одновременно как на прямой центров, так и на окружности центров. Это может произойти только в случае их взаимного пересечения. Выполним оба требования в данной ситуации (по условию). Находим точки пересечения и строим искомую окружность (рис. 22). Сколько решений имеет задача?

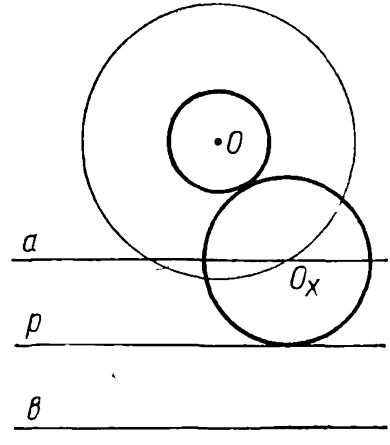


Рис. 22

Итак, мы познакомились с

двумя задачами, родственными данной, — 14 а и 14 б. Задача разделилась на две более простые. Отметим, что эта задача может иметь до 8 решений или ни одного, в зависимости от размеров и взаимного расположения данных в условии фигур.

Следует также показать учащимся, что разбиение на подзадачи не всегда определяется логической структурой самой задачи (и не следует всегда стремиться к этому). Этот прием оказывается эффективным в том случае, когда решение данной задачи удается свести к решению более простых, аналогичных или являющихся частными случаями данной.

Часто новая вспомогательная задача представляет собой некоторую гипотезу, попытку по-другому соотнести условие и требование в новой системе связей. Каждая частная задача является в этом случае исходным пунктом для возникновения новой, связанной с другими задачами, поскольку она отвечает на вопрос предыдущей и ставит новый вопрос для последующей. При решении данной конкретной задачи весь путь разбивается на части, в отношении которых ставятся частные цели, которые каждый раз связываются с требованием, а не уводят от него.

Очевидна необходимость обучения школьников обнаруживать такие вспомогательные задачи в ходе решения основной, научить составлять их, так как только благодаря такой работе возможен успешный поиск решения.

Нередко оказывается полезным решение такой вспомогательной задачи, условие или некоторые данные которой получаются из условия или из данных исходной при помощи предельного перехода. В частности, некоторые фигуры, о которых говорится в задаче, заменяются фигурами, возникающими из данных в предельном случае. Например, если в исходной задаче говорилось о секущей к окружности, то вместо нее во вспомогательной полезно рассматривать касательную (предельное положение секущей, когда расстояние ее от центра стремится к длине радиуса).

Разумеется, для элементов одной и той же задачи можно подобрать различные предельные случаи их возможного изменения. Рассмотрение предельных случаев полезно также при выяснении степени правдоподобия той или иной догадки о конечном результате решения, а также для построения опровержения некоторого утверждения. Рассмотрим следующий пример.

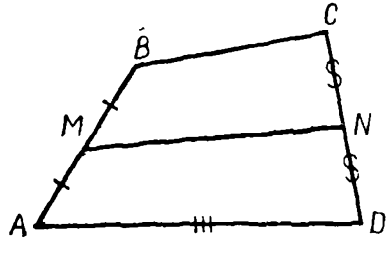


Рис. 23

Задача 15. В четырехугольнике $ABCD$ две стороны $[AD]$ и $[BC]$ не параллельны (рис. 23). Что больше: полусумма длин этих сторон или длина отрезка MN, соединяющего середины двух других сторон четырехугольника?

Совместно с учащимися учитель

организует поиск решения этой задачи так.

Рассмотрим сначала, как будет обстоять дело в предельном случае, когда одна из сторон четырехугольника стягивается в точку; можно стягивать в точку либо $[BC]$ (или $[AD]$), либо $[AB]$ (или $[CD]$). Выберем первый путь: пусть $[BC]$ стягивается в точку B (рис. 24).

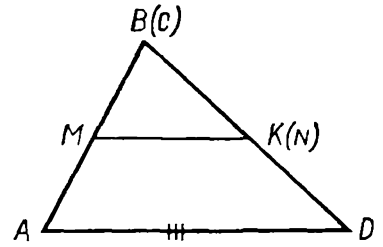


Рис. 24

В предельном случае получаем следующую вспомогательную задачу:

З а д а ч а 15 а. Что больше: половина длины стороны AD треугольника ABD или длина отрезка MK, соединяющего середины двух других сторон?

Ответ известен: $|MK| = 0{,}5\ |AD|$.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли к этому предельному случаю свести решение задачи в общем случае? Нетрудно усмотреть, что ответ на него утвердителен. В самом деле (рис. 25), пусть K — середина диагонали BD четырехугольника $ABCD$. Из $\triangle ABD: |MK| = 0{,}5\ |AD|$, $[MK]$ параллелен $[AD]$. Из $\triangle BCD: |KM| = 0{,}5\ |BC|$, $[KN]$ параллелен $[BC]$. Так как по условию $[AD]$ не параллелен $[BC]$, то M, K и N не лежат на одной прямой. Из $\triangle MKN: |MN| < |MK| + |KN| = 0{,}5x$, где $x = |AB| + |BC|$. Если же при поиске решения пойти по другому пути (стягивать в точку сторону AB), то возникает другой предельный случай ($[MN]$ — медиана $\triangle CMD$), который подскажет иной способ решения (параллельный перенос отрезков AD и BC, при котором точки A и B переходят в точку M).

Нередки случаи, когда тем или иным правильным выводам, основанным на интуиции, способствует привлечение так называемого принципа непрерывности. Этот интересный прием математических рассуждений в качестве общего приема решения задач выступает, к сожалению, очень редко (возможно, до сих пор это объяснялось тем, что в школьном курсе понятие непрерывности функции отсутствовало). В грубом приближении применительно к процессу решения задач этот прием можно описать так. Если какой-либо объект изменялся непрерывно в течение определенного промежутка времени (или во время определенного изменения его компонентов)

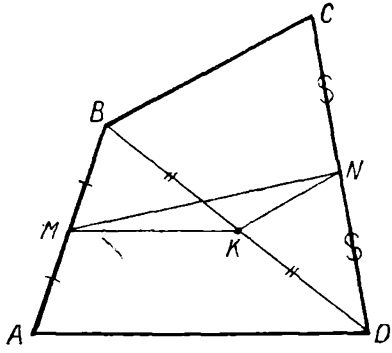


Рис. 25

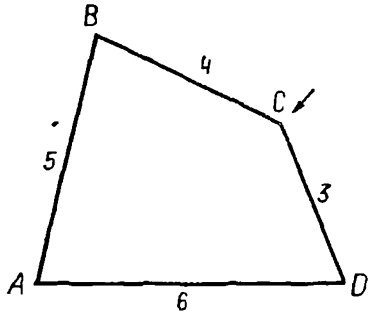


Рис. 26

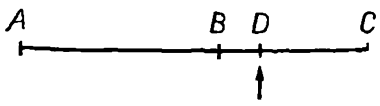


Рис. 27

так, что в некоторый начальный момент времени (в некотором начальном состоянии) его значение было меньше какого-то числа a, а в конечный момент времени (в конечном состоянии) оно стало больше этого числа, то, вероятно, существует такой момент времени (такое состояние), когда значение этого объекта равно числу a.

Несмотря на очевидную нестрогость этого утверждения, использование подобного соображения в ходе поиска решения задачи часто приносит пользу, и потому ознакомление с ним школьников представляется желательным.

Рассмотрим для иллюстрации процесс решения следующей задачи.

З а д а ч а 16. Верно ли, что нельзя вписать в окружность четырехугольник, у которого стороны пропорциональны числам 5, 4, 3, 6?

Будем вести поиск решения этой задачи так. Воспользуемся соображениями непрерывности. Вообразим себе шарнирный четырехугольник $ABCD$ со сторонами, равными 5, 4, 3 и 6 единицам (рис. 26). Так как $|AB| + |BC| = |CD| + |DA|$, то можно деформировать (сплюснуть) четырехугольник в отрезок AC (рис. 27). Тогда все стороны окажутся на одной прямой. В этом начальном положении четырехугольника $\widehat{A} + \widehat{C} = 0° < 180°$.

Будем теперь сжимать четырехугольник по направлению $\overrightarrow{CA}$ до тех пор, пока ломаная BCD не превратится в отрезок BD (рис. 28). В этом конечном положении $\widehat{A} + \widehat{C} > 180°$. Так как из начального положения мы пришли к конечному, непрерывно меняя сумму величин углов A и C, то в какой-то момент величина суммы $\widehat{A} + \widehat{C}$, по-видимому, была равна 180°.

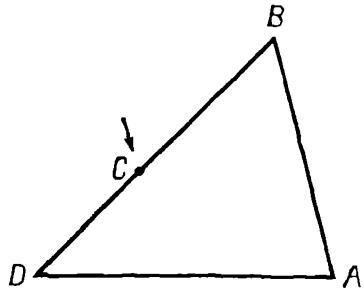


Рис. 28

Возможно и вероятно существует такое положение этого четырехугольника, при котором около него можно описать окружность. Задача по существу решена. Остается только обосновать правильность полученного результата.

2.4. У заинтересованных математикой ребят почти никогда не возникает вопроса, зачем решать уже решенную задачу как-то по-другому, ибо «*желание исследовать* является... отличительной чертой математика»[1]. Однако остальные школьники иногда считают эту работу напрасной, своеобразным проявлением прихоти учителя. Поэтому вопрос «Какую пользу приносит решение задачи несколькими способами?» является далеко не праздным, и учащиеся должны знать ответ на него.

Прежде всего школьники должны осознать следующее.

Решив задачу, мы уже знаем ее результат, и в поисках нового решения можем сосредоточиться не на результате (каким он будет), а на методе (как прийти к этому результату другим путем). Это, с одной стороны, вроде бы облегчает наши действия, но, с другой стороны, усложняет их, так как вступает в силу психологическая инерция[2]. Преодолевая в себе эту инерцию ума, мы воспитываем у себя гибкость ума, важную для любого человека, не только математика. Учителю полезно предложить школьникам сравнить два решения одной и той же задачи и применить результат такого сравнения к решению задачи, аналогичной данной.

Рассмотрим конкретную ситуацию.

З а д а ч а 17. На доске было написано пять целых чисел. Сложив их попарно, получили следующие десять чисел:

0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15.

Какие пять чисел были написаны на доске?

Р е ш е н и е 1. Могло быть написано либо одно, либо четыре нечетных числа, так как только одно или четыре нечетных числа из пяти дадут четыре нечетные суммы (9, 11, 13, 15). Так как нечетные суммы отличаются на два, то либо четыре четных числа (при одном нечетном), либо четыре нечетных числа отличаются на два (вторым слагаемым во всех четырех случаях является одно и то же число). Тогда эти четыре числа можно представить следующим образом:

a, $a + 2$, $a + 4$, $a + 6$. Складывая эти числа, получим две суммы, равные 4. Равные суммы получаются при сложении первого с четвертым и второго с третьим, т. е. $a + (a + 6) = (a + 2) + (a + 4) = 4$. Из уравнения $2a + 6 = 4$ получаем $a = -1$. Искомые слагаемые: -1, 1, 3, 5, 10.

Р е ш е н и е 2. Сложив все десять сумм, получим 72. Так как каждое слагаемое входит в четыре суммы, то сумма искомых чисел равна $72 : 4 = 18$. Сумма наименьших двух равна нулю, а наибольших — 15. Значит, третье по величине число есть $18 - 0 - 15 = 3$. В последовательности сумм второе место (2) занято, очевидно, суммой первого и третьего чисел. Поэтому наименьшее число есть $2 - 3 = -1$.

---

[1] С о й е р У. У. Прелюдия к математике. М., 1972, с. 13.

[2] См.: Д и к с о н Дж. Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений. М., 1969, с. 7.

Второе число есть 0 — (—1) = 1. Аналогично находим, что большие числа равны 5 и 10. Искомые слагаемые: —1, 1, 3, 5, 10.

Оба решения привели к одному и тому же результату, но задача рассматривалась с различных теоретических позиций. Первое решение было основано на свойстве искомых чисел как слагаемых (каковы должны быть слагаемые, чтобы получились указанные суммы?). Второе решение было основано на свойстве суммы искомых чисел (какова должна быть эта сумма или какой она получается?) при данных значениях суммы пар чисел. В первом случае задача решалась методом разложения и составления новых комбинаций, во втором — методом обобщения.

Переход от первого способа решения задачи к поиску второго вызван возникновением следующей полезной идеи: мы начали с того, что рассматривали некоторые суммы, разбивали их на слагаемые; если же представить сами суммы как слагаемые и найти их сумму, то обнаруживается интересная закономерность: возникает учетверенная сумма искомых чисел.

Рассмотрим, как решается задача, аналогичная задаче 17, способом, подсказанным первым ее решением, и способом, основанным на втором ее решении.

З а д а ч а 18. Можно ли попарным сложением пяти чисел получить следующие десять сумм: 12, 13, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 20?

1-й с п о с о б. Как и при решении предыдущей задачи, может существовать либо одно, либо четыре нечетных числа, так как имеются четыре нечетные суммы.

Так как уже имеется пара равных нечетных сумм (17, 17), то среди искомых чисел (если они существуют) есть два равных. При двух равных слагаемых должны получиться четыре пары равных сумм, а их всего две (16, 16 и 17, 17). Значит, получить данные десять чисел попарным сложением пяти чисел невозможно.

2-й с п о с о б. Сумма десяти данных чисел 158. Сумма искомых чисел должна равняться 158 : 4 и быть целым числом, так как искомые числа целые (данные суммы целые). Но 158 : 4 = 19,75, следовательно, получить данные десять сумм попарным сложением пяти чисел невозможно.

Как видно, решение этой задачи первым способом, хотя и может быть записано в более сжатой форме, все же требует проведения весьма сложных рассуждений. В то же время применением второго способа, использованного при решении задачи 17, новая решается почти автоматически.

Несмотря на то что второй способ в данном случае оказался эффективнее, нельзя категорически заявлять, что он лучше первого. Существуют задачи, для решения которых способ разложения и составления новых комбинаций более эффективен, чем метод обобщения. К положительным характеристикам первого способа решения можно отнести и то, что он основан на индуктивном, а следовательно, более естественном для человека наблюдении и

поиске закономерностей (сколько нечетных слагаемых из пяти дают четыре нечетные попарные суммы? Если эти суммы отличаются друг от друга на 2, то как отличаются друг от друга сами слагаемые? и т. д.). Первый способ решения выглядит более естественным и потому, что рассуждение направлено сразу на поиск искомых чисел.

Итак, первым важным аспектом обучения решению задач, проявляющимся при решении различными способами, является овладение общими методами и приемами решения.

Перейдем к рассмотрению второго аспекта обучения решению задач, связанного с различными способами решения. Решение одной и той же задачи несколькими способами с целью обогащения своего опыта — только одна из возможных мотивировок полезности этой работы.

Учащимся полезно продемонстрировать и тот факт, что различные способы решения одной и той же задачи дают возможность использовать те или иные теоретические положения. Это делает их знания более прочными и более осознанными, т. е. способствует успешному изучению программного материала (понятно, что возможность использования одной и той же задачи на различных ступенях обучения математике с различными дидактическими целями представляет интерес и для учителя).

Рассмотрим один характерный пример.

З а д а ч а 19. Нужно отремонтировать три шоссейные дороги длиной 80 *км*, 95 *км* и 115 *км*. Определить затраты на ремонт каждой дороги, если расходы на ремонт 1 *км* пути одинаковы и если на ремонт первой дороги отпущено на 1800 руб. меньше, чем на ремонт второй.

Приведем несколько способов решения этой задачи.

1-й с п о с о б.

1) $95 - 80 = 15$ *км*.
2) $1800 : 15 = 120$ (руб. на 1 *км* пути).
3) $120 \cdot 80 = 9600$ (руб.).
4) $120 \cdot 95 = 11\,400$ (руб.).
5) $120 \cdot 115 = 13\,800$ (руб.).

Этот способ решения может применяться в IV классе; для этого достаточно знать действия над натуральными числами.

2-й с п о с о б (способ ложного положения).

1) Пусть на ремонт первой дороги пошло 12 000 (руб.), тогда ремонт 1 *км* пути стоит $12\,000 : 80 = 150$ (руб.). Тогда на ремонт второй дороги будет затрачено $150 \cdot 95 = 14\,250$ (руб.). Разница в затратах на ремонт первой и второй дорог составит $14\,250 - 12\,000 = 2250$ (руб.). Погрешность по сравнению с данным будет $2250 - 1800 = 450$ (руб.).

2) Пусть на ремонт первой дороги пошло 12 080 руб., тогда 12 080 : 80 = 151 (руб.) пошло на 1 *км* пути; 151 · 95 = 14 345 (руб.) — на ремонт второй дороги. 14 345 — 12 080 = 2265 (руб.) — разница в затратах. Погрешность: 2265 — 1800 = 465 (руб.).

3) Изменение погрешности 465 — 450 = 15 (руб.). Чтобы сделать погрешность нулевой, нужно уменьшить предполагаемые затраты на ремонт первой дороги (12 000 руб.) на 450 : 15 = 30 раз по 80, т. е. на 80 · 30 = 2400 (руб.). Итак, на ремонт первой дороги пошло 12 000 — 2400 = 9600 (руб.) и т. д.

3-й способ (с использованием дробных чисел).

1) $95 : 80 = 1^{15}/_{80} = 1^{3}/_{16}$ (длина первой дороги принята за единицу);

2) $115 : 80 = 1^{7}/_{16}$ (то же самое);

3) $1^{3}/_{16} - 1 = {}^{3}/_{16}$ (приходится на 1800 руб.);

4) $1800 : {}^{3}/_{16} = 9600$ (руб. приходится на ремонт первой дороги);

5) 9600 + 1800 = 11 400 (руб.);

6) $9600 : 1^{7}/_{16} = 13\,800$ (руб.).

4-й способ (можно предложить в V классе при изучении темы «Пропорции»).

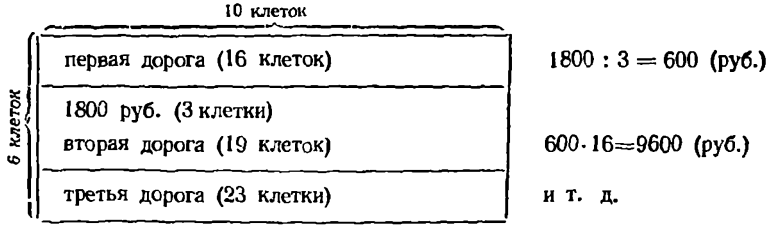
$$\frac{95}{80} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{95-80}{80} = \frac{x_2 - x_1}{x_1}, \quad \frac{15}{80} = \frac{1800}{x_1}, \quad x_1 = 9600 \text{ (руб.) и т. д.}$$

5-й способ (в VI классе при изучении темы «Прямая пропорциональность»).

Пусть y — стоимость ремонта, x — длина дороги. Тогда $y = kx$; нужно найти k; $k = 120$, так как 95 — 80 = 15, 1800 : 15 = 120. Строим график $y = 120x$ (в определенном масштабе), и по графику определяем значение функции при значениях аргумента 80, 95, 115.

6-й способ (с использованием диаграммы).

Пусть одна клетка тетради соответствует 5 *км* пути.



7-й способ (составление уравнения).

а) Пусть x (руб.) затратили на ремонт 1 *км* пути. Имеем уравнение: $95x - 80x = 1800$, откуда $15x = 1800$, $x = 120$ и т. д.

4-й и 5-й способы указывают на возможность возвращения к этой задаче в курсе алгебры VI класса.

Если учителю удается привить учащимся интерес к отысканию различных способов решения задач и разных способов доказательств математических предложений, то он сможет практиковать такую работу и в ходе изучения программного материала (в частности, при изучении школьниками доказательств теорем). Пытаясь самостоятельно доказать ту или иную теорему, учащиеся стараются вспомнить ранее изученные положения и применить их к доказательству. Обычно им приходится повторять по учебнику определенную часть изученного материала, реже решение или доказательство появляется само собой.

Итак, обучение различным приемам решения задач является мощным дидактическим средством, повышающим эффективность усвоения знаний, предусмотренных программой.

Третий важный аспект обучения решению задач, связанный с различными способами решения, выявляется в особого рода деятельности, связанной с актуализацией и интеграцией знаний и опыта.

2.5. Решая нестандартную задачу, школьнику приходится выполнять самые разнообразные мыслительные операции: изобретать новые (по крайней мере для него самого) приемы решения задачи, восстанавливать в памяти известные ему теоретические положения, обращаться к собственному опыту решения задач и обогащать его знанием новых возможных связей между различными математическими объектами. Среди всего этого разнообразия мыслительных операций важное значение имеет так называемая актуализация знаний.

Под актуализацией понимается процесс непреднамеренного воспроизведения и использования человеком известных ему знаний и умений в новой для него ситуации. Непреднамеренность этого мыслительного процесса не следует понимать как его неуправляемость, как невозможность сознательной активизации этого процесса как самим индивидуумом, так и посредством окружающей его среды.

Интеграция и актуализация знаний представляют собой по существу единый процесс накопления и использования полезной информации. И если процесс использования этой информации в новой ситуации протекает весьма индивидуально, то процессом ее накопления в обучении можно и нужно управлять.

Непреднамеренность умственных действий, осуществляемых в процессе актуализации, часто приводит к тому, что, встречая новый (или давно забытый им) вид задач, школьник часто «переоткрывает» заново даже то, что по существу ему известно, знакомо из прошлого опыта, но что никак не может быть воспроизведено в его памяти в силу больших помех, возникающих из-за того, что она перегружена бесполезной информацией. Частое «переоткрывание» каких-либо знаний и умений, конечно же, еще более закрепляет

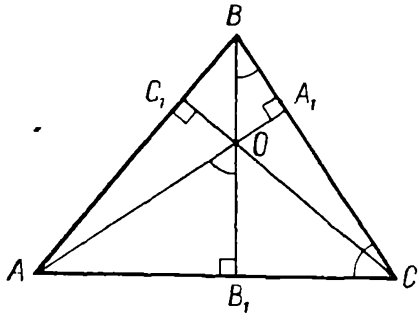


Рис. 29

последние в памяти, а значит, еще более затрудняет поиск ценной (для данной ситуации) информации, создает косность мышления. Ясно, что такой путь обучения не только не рационален, а часто вреден.

Более эффективным путем, способствующим превращению имеющихся знаний и умений в действенное средство решения новых задач, является постоянная ориентация обучения на сознательное (заранее планируемое) выявление и запоминание наиболее общих знаний, приемов деятельности, необычных связей между объектами изучения, т. е. отбор и запоминание той информации, которая может быть признана как полезная. Понятно, что сам школьник часто не в состоянии отличить зерна от плевел; однако учитель математики может и должен помочь ему в этом, постепенно формируя у школьника различные критерии оценки этой полезности.

Наряду с ориентацией школьников на необходимость управлять процессом накопления информации необходимо обучить их и тому, как и когда это делать.

Одним из наиболее известных приемов, способствующих активизации процесса интеграции знаний, является подведение локальных и общих итогов работы над решением задачи, проводимое как в процессе ее решения, так и по окончании его.

С этой целью Д. Пойа предлагает, например:

а) осуществлять проверку результата, полученного в ходе решения задачи, и проверку самого хода решения;

б) получать тот же результат решения другим способом;

в) отыскивать новые задачи, к которым мог бы быть применен либо результат решения данной задачи, либо тот метод, каким это решение было осуществлено[1].

Первая и вторая из указанных рекомендаций Д. Пойа, пожалуй, уже вошли в практику обучения математике, но вошли во многих случаях еще формально (и школьники, и учителя знают, что делать это полезно, но часто ни те, ни другие не знают, чем же обусловливается эта полезность).

Между тем с точки зрения активизации знаний (а не формального обучения) лучшая проверка правильности полученного результата решения задачи — это получение его именно другим способом, не говоря уже о том, что в ходе такой проверки часто удается найти более короткое, красивое, поучительное решение.

[1] См.: Пойа Д. Как решать задачу. М., 1961, с. 203.

Проиллюстрируем сказанное следующим примером:

З а д а ч а 20. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $|OC| = |AB|$. Найти величину угла C (рис. 29).

Вот одно из возможных решений задачи:

1) $\triangle OCB_1 \cong \triangle ABB_1$ (так как $\angle ABB_1 \cong \angle OCB_1$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами; треугольники прямоугольные); $|AB| = |OC|$ (по условию);

2) из (1) следует: $|AB_1| = |OB_1|$ и $\widehat{B_1AO} = \widehat{AOB_1} = \frac{\pi}{4}$;

3) $\angle AOB_1 \cong \angle ACB$ (из подобия $\triangle AA_1C$ и $\triangle AOB_1$ — по двум углам);

4) из (3) и (2) следует: $\widehat{C} = \frac{\pi}{4}$.

Проверка решения:

1) Можно рассматривать и другую пару конгруэнтных треугольников: $\triangle A_1OC$ и $\triangle BAA_1$; тогда прямоугольным равнобедренным треугольником будет $\triangle BOA_1$;

2) из (1) следует: $|OA_1| = |A_1B|$ и $\widehat{OBA_1} = \widehat{BOA_1} = \frac{\pi}{4}$;

3) $\triangle BB_1C$ прямоугольный;

4) из (3) следует: $\widehat{C} = \frac{\pi}{4}$.

Именно так при проверке решения данной задачи одним из учащихся VIII класса школы № 352 Москвы было получено новое решение, более простое (и доступное даже учащимся VI класса).

Третья из перечисленных рекомендаций Д. Пойа внешне также реализуется в практике обучения математике. Однако, как правило, составление самими школьниками новых задач имеет основной целью либо иллюстрацию определенного теоретического положения, либо закрепление в памяти той или иной типичной ситуации.

Между тем в целях интеграции знаний требуются задачи, в которых результат решения получал бы непосредственное и эффективное развитие.

Наряду с необходимостью постоянно ориентировать школьников на интеграцию знаний в ходе решения тех или иных отдельных задач, связанных с изучением программного материала, весьма полезно предлагать учащимся специально подобранные серии задач, составленные так, чтобы научить школьников умелому накоплению и использованию опыта, т. е. пользоваться результатами ранее полученных знаний при поиске решения новой задачи.

Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере урока по решению задач, проведенного в одном из VII классов школы. Прежде чем предложить учащимся нестандартную задачу, учитель предложил им решить следующую простую.

З а д а ч а 21. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 *см* и 4 *см*. Найти длину медианы треугольника, проведенной к его гипотенузе.

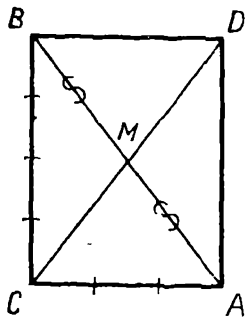


Рис. 30

Школьники предложили два способа решения:

1-й способ (рис. 30). $|AB| = \sqrt{9+16} = 5$ (*см*). Прямоугольный треугольник достраивается до прямоугольника. В прямоугольнике диагонали конгруэнтны и в точке пересечения делятся пополам. Поэтому $|CM| = 2{,}5$ *см*.

2-й способ (рис. 31). $|AB| = 5$ *см*. Точка M является центром описанной окружности, тогда $|CM| = {}^1/_2|AB| = 2{,}5$ *см*, так как $[CM]$ — радиус этой окружности, а $[AB]$ — ее диаметр.

Вместе со школьниками учитель сравнил оба способа решения. Было установлено, что по сложности они примерно равноценны, но второй способ более интересен, так как он необычен: надо уметь пользоваться свойствами описанной окружности.

Учитель предложил учащимся обобщить эту задачу, исключив из ее условия конкретные данные 3 *см* и 4 *см*. Школьники сами сформулировали условие более общей задачи.

Задача 22. Доказать, что длина медианы, проведенной из вершины прямого угла треугольника, равна половине длины гипотенузы.

Тем самым было установлено новое для учащихся свойство медианы, проведенной из вершины прямого угла к гипотенузе прямоугольного треугольника. Затем учитель предложил следующую задачу:

Задача 23. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам величину угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

Школьники в среднем в течение 10 *мин* самостоятельно справились с решением этой задачи. Некоторые из них сумели ее решить за меньший срок, многие — различными способами. Например:

1-й способ (рис. 32). Воспользуемся результатом решения задачи 22. $\triangle ACM$ равнобедренный, $[AM] \cong [MC]$, следовательно, $\widehat{1} = \widehat{5}$.

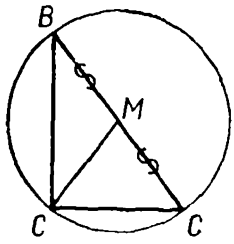


Рис. 31

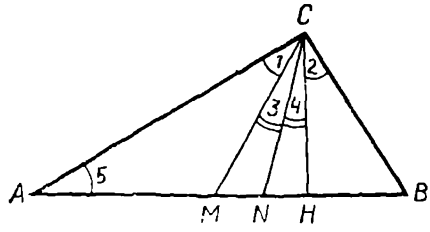


Рис. 32

Так как $\triangle ABC \backsim \triangle CHB$, то $\widehat{5} = \widehat{2}$. Тогда $\widehat{1} = \widehat{2}$; $\angle ACN \cong \angle NCB$, так как $[CN]$ — биссектриса; поэтому и $\widehat{3} = \widehat{4}$ (что требовалось доказать).

2-й способ (рис. 33). Опишем около данного треугольника окружность: $\widehat{1} = \widehat{2}$ (известная задача 22), тогда $\overset{\frown}{AM_1} = \overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BH_1}$ (по теореме о диаметре, перпендикулярном хорде). $\overset{\frown}{AN_1} = \overset{\frown}{N_1B}$, так как $[CN]$ — биссектриса, тогда $\overset{\frown}{M_1N_1} = \overset{\frown}{N_1H_1}$ (дополняют равные величины дуг до равных) и по свойству вписанных углов $\widehat{3} = \widehat{4}$.

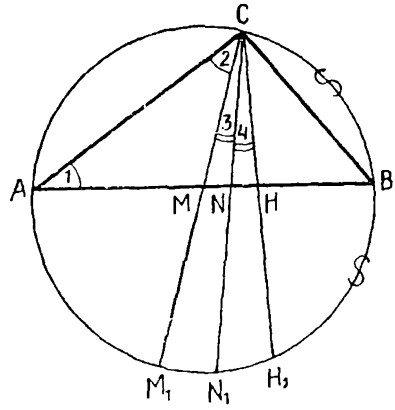


Рис. 33

Здесь учащиеся воспользовались не только результатом решения задачи 22, но и методом решения, найденным при решении задачи 21: описать окружность около треугольника.

3-й способ (рис. 34). Как и в предыдущих случаях, описываем окружность около треугольника $\widehat{1} = \widehat{2}$ (задача 22). $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$ (свойство диаметра, перпендикулярного хорде). Тогда $\widehat{4} = \widehat{5}$ (дополняем до равных величин углов); задача решена.

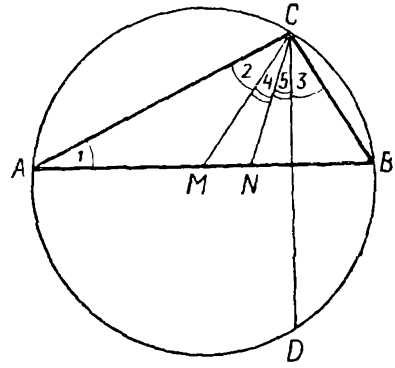


Рис. 34

4-й способ (рис. 35). $\overset{\frown}{AN_1} = \overset{\frown}{N_1B}$ (так как $[CN]$ — биссектриса). Соединим M и N_1; $[N_1M]$ перпендикулярен $[AB]$ (известная теорема). $[N_1M]$ параллелен $[CH]$ (два перпендикуляра к $[AB]$); $\angle 1 \cong \angle 2$ (накрест лежащие углы); $\angle 2 \cong \angle 3$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Тогда $\angle 1 \cong \angle 3$. Задача решена.

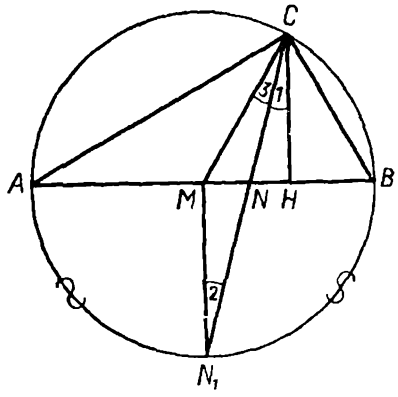


Рис. 35

Остальные способы решения

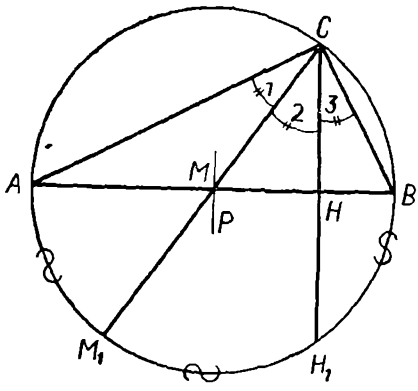


Рис. 36

задачи 23 представляли собой различные комбинации элементов приведенных решений. Различные способы решения этой задачи стали предметом коллективного обсуждения. В результате дискуссии было признано, что первый способ проще, чем найденные остальные. Затем был подведен итог (что полезного мы узнали в ходе решения этой задачи? Чему нас научил процесс ее решения?). Школьники пришли к следующим выводам:

а) полезно смелее пользоваться дополнительными построениями;

б) следует более активно использовать известные разделы теории;

в) полезно с разных сторон подходить к рисунку-чертежу с целью усмотреть в нем какую-либо важную особенность задачной ситуации, которой можно воспользоваться в ходе решения;

г) в ходе решения этой задачи было установлено и успешно использовано интересное свойство биссектрисы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

Уже по ходу решения этой задачи у учащихся также естественно возник вопрос о том, будут ли конгруэнтны углы, образованные катетами, высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла ($\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$)? Общими усилиями выяснили, что эти углы будут конгруэнтны только в частном случае, когда величины острых углов треугольника равны 30° и 60°. Таким образом, попутно была составлена и решена новая задача, а затем составлена и решена обратная ей.

З а д а ч а 24. Если медиана и высота, проведенные из одной вершины некоторого треугольника, делят велнчину соответствующего этой вершине угла на три равные части, то этот треугольник прямоугольный. Доказать.

Эту задачу школьники решили также разными способами. Вот один из них (рис. 36). Дано: $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{3}$. Доказать: $\widehat{C} = 90°$.

Опишем окружность около данного треугольника. Если удается доказать, что центр окружности находится в точке M, то данный треугольник прямоугольный (задача 21). $\overset{\frown}{AM_1} = \overset{\frown}{M_1H_1} = \overset{\frown}{H_1B}$. Так как $\widehat{CHA} = 90°$, то $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AM_1} = 180°$, т. е. центр окружности лежит на $[M_1C]$ — диаметре. В то же время центр должен лежать на перпендикуляре к $[AB]$, проведенном через середину M отрезка AB. Но $[MC]$ пересекает этот перпендикуляр в единственной точке M, значит, $\widehat{C} = 90°$.

Далее учитель с помощью модели провел обобщение, указав

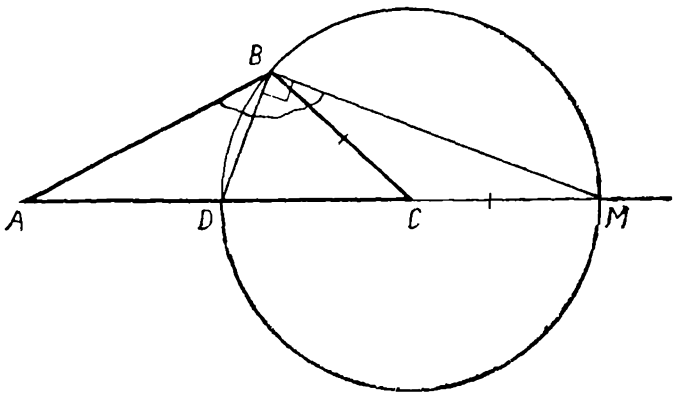


Рис. 37

на взаимосвязь высоты, медианы и биссектрисы в прямоугольном треугольнике. Отметив, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, биссектриса и медиана совпадают, установили, что при движении точки C по окружности высота и биссектриса отходят от медианы, биссектриса делит угол между ними пополам. Когда $\widehat{B} = 60°$, возникает второй частный случай, при котором величины углов, образованные катетами, медианой и высотой, равны. При дальнейшем движении точки C величина угла между медианой и высотой возрастает, но тем не менее она делится пополам биссектрисой.

Затем учащиеся перешли к решению следующей задачи.

З а д а ч а 25. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок CM, такой, что $|CM| = |BC|$; доказать, что $\angle ABM$ тупой (рис. 37).

Задача была решена двумя способами:

1-й с п о с о б. Условие $|BC| = |CM|$ натолкнуло школьников на мысль о том, что было бы полезно где-то отыскать прямой угол и использовать еще раз известное им теперь свойство медианы. Была проведена окружность с центром в точке C радиусом $r = |CM|$; $\widehat{MBD} = 90°$. Так как $|BC| < |AC|$ (по условию), то точка $D \in [AC]$, и потому $\angle ABM$ тупой.

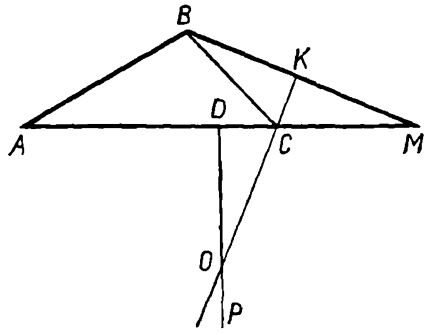


Рис. 38

И в этом случае решенная ранее задача оказалась полезной при решении данной.

2-й с п о с о б решения был

основан на следующем свойстве центра описанной окружности (рис. 38): если треугольник тупоугольный, то центр лежит вне треугольника; центр лежит на пересечении медиатрис сторон. Перпендикуляр к стороне BM проходит через C (так как треугольник равнобедренный). Середина $[AM]$ лежит на $[AC]$, так как $|AC| > |CM|$. Так как $\angle KCM$ острый, то $[DP) \cap [CK) = \{0\}$ — вне треугольника, т. е. $\angle ABM$ тупой.

В этом случае при решении задачи также была использована окружность, описанная около данного треугольника.

Было специально отмечено, что в процессе решения этих задач учащиеся научились пользоваться весьма мощным средством связи элементов треугольника — описанной окружностью. Эта серия задач, помимо достижения основной цели, способствовала также развитию у учащихся интереса к творческому поиску в решении, к составлению новых задач, убедила их в полезности систематизации известных знаний и опыта и тем самым содействовала всестороннему развитию их математического мышления.

Ясно, что решение этой (и подобных) серий задач формирует и развивает у школьников способность и потребность к сознательной систематизации знаний. Тем самым удается в значительной мере реализовать то, что следует называть обучением решению задач.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КАК СРЕДСТВО ВОСПИТАНИЯ

Основной целью воспитания в советской школе является подготовка подрастающего поколения к активному участию в строительстве коммунизма. Для советской школы характерно органическое слияние целей воспитания с целями обучения и развития личности.

С точки зрения психологии воспитание школьника — всестороннее формирование всей психологии молодого человека, т. е. формирование его мировоззрения, интеллектуальных качеств его личности, воспитание морально-волевых качеств, воспитание потребности к трудовой деятельности и т. д.

Процесс обучения школьника, в частности процесс обучения математике, представляет собой богатую педагогическую среду, способную активно воздействовать на личность каждого учащегося и дающую ему возможность активно участвовать в учебной и общественной деятельности.

«То, что непосредственно определяет развитие психики ребенка, — подчеркивает известный советский педагог-психолог А. Н. Леонтьев, — это сама его жизнь, развитие реальных процессов этой жизни, иначе говоря, развитие деятельности ребенка,

как внешней, так и внутренней»[1]. Поэтому управление со стороны учителя процессом воспитания учащихся есть управление их деятельностью как учебной, так и такой, при которой учащийся вступает в различные общественные и личностные отношения с окружающими.

Обучение математике заключает в себе большие возможности для создания весьма эффективных воспитательных ситуаций, способствующих успешному решению общих задач воспитания молодежи.

Известный советский педагог-математик А. Я. Хинчин пишет: «По моему многолетнему опыту работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает — исподволь и весьма постепенно — в молодом человеке целый ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике. Сделать этот процесс более активным и результаты его более прочными — достойная задача для учителя»[2]. К таким чертам характера А. Я. Хинчин относит честность и правдивость, настойчивость и мужество, воспитание патриотизма.

Представляется уместным сформулировать здесь некоторые принципиальные положения, повышающие эффективность результатов воспитания в процессе обучения вообще и в процессе обучения математике в частности:

1) Воспитание учащихся должно иметь непрерывный, планомерный характер, в полном соответствии с характером обучения и развития. Вряд ли можно ожидать серьезных результатов от проведения эпизодических мероприятий воспитательного характера.

2) Воспитание в процессе обучения не должно быть навязчивым; лучше, если оно будет иметь скрытый характер, если его подтекст воспринимается учащимися как внутреннее самостоятельно сформировавшееся у них убеждение или норма поведения.

3) Воспитание в процессе обучения должно в идеале перерастать в самовоспитание. А потому личный пример учителя, его отношение к собственному труду, мировоззрение и нравственные качества играют большую роль.

Согласно требованиям советской дидактики обучение математике, содействуя общему образованию учащихся, должно одновременно быть обучением воспитывающим. Это значит, что оно должно не только помогать учащимся овладевать системой знаний, но и прививать им общую культуру, неотъемлемое качество каждого советского человека. В первую очередь важно, чтобы учащиеся осознали роль математики в истории культуры всего чело-

---

[1] Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики. М., 1972, с. 504.
[2] Хинчин А. Я. Педагогические статьи. Под ред. Б. В. Гнеденко. М., 1963, с. 146—147.

веческого общества, имели представление о взаимоотношении математики с другими отраслями науки, а в особенности понимали фундаментальную роль математики для развития естественных и технических наук. Установление в процессе обучения тесной связи математики с другими науками и жизненной практикой, обращение к истории развития математики способствуют развитию у учащихся диалектико-материалистического, научного мировоззрения и росту их общей культуры.

Большую роль в осуществлении этих важнейших целей воспитания в ходе обучения математике призваны играть задачи. Как сами задачи, так и их постановка (или процесс их решения) должны нести в себе определенные воспитывающие функции.

Понятно, что процесс воспитания даже в ходе решения задач должен быть управляемым, а те или иные его аспекты вовремя выявленными и осознанными школьниками (по возможности самостоятельно).

При этом в соответствии с указанными принципиальными положениями воспитывающие функции математических задач, как правило, не должны выступать в роли ведущих (в отличие от функций обучающих или развивающих). Вместе с тем тот или иной элемент воспитания должен обязательно иметь место в ходе решения каждой математической задачи. В самом деле, если задача не является стандартной для школьника, то, какова бы ни была ее фабула, для того чтобы решить ее, ему приходиться приложить определенные усилия, проявить такие нравственные качества личности, как волю, настойчивость, целеустремленность и т. п. Если даже задача стандартна, но облечена в интересную фабулу, то последняя также может нести в себе те или иные воспитывающие функции (формирование диалектико-материалистического мировоззрения, воспитание чувства патриотизма и т. п.).

Так, решая простую вычислительную задачу, как, например, следующая:

З а д а ч а 1. Сколько лет идет до нас свет от самой яркой звезды северного полушария Сириуса, если расстояние от Сириуса до Земли равно $84 \cdot 10^{12}$ *км*, а скорость света $3 \cdot 10^5$ *км/сек*?—учащиеся в весьма интересной для них форме познают реальный мир, знакомятся с определенными фактами физики и астрономии.

Решая с учащимися задачи, фабула которых связана, например, с реализацией пятилетнего плана развития народного хозяйства, с нашими достижениями в области науки, техники и культуры, учитель имеет возможность убедительно продемонстрировать учащимся тот факт, что математические абстракции (понятие числа, фигуры, функции и т. д.) не являются продуктом «чистого разума» ученых-математиков, а представляют собой результат отражения и научного обобщения, возникшего на базе многовековой практики человечества.

Рассматривая со школьниками прикладные задачи, например, при изучении элементов математического анализа, учащиеся смогут

оценить глубокий смысл высказывания Ф. Энгельса: «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение»[1].

Именно в ходе решения таких задач школьники познают диалектико-материалистическую сущность математики, ярко выраженную в следующем высказывании В. И. Ленина: «Подход ума (человека) к отдельной вещи, снятие слепка (-понятия) с нее н е е с т ь простой, непосредственный, зеркально-мертвый акт, а сложный, раздвоенный, зигзагообразный, *включающий в себя* возможность отлета фантазии от жизни...»[2].

В процессе обучения математике на тех или иных задачах можно показать школьникам, каким трудным и сложным является процесс отображения в мышлении человека реальных явлений.

Необходимо постоянно подчеркивать, что великие достижения человеческой мысли, такие, как развитие кибернетики и ее приложений, создание ЭВМ, космических кораблей и освоение космоса, успехи современной физики и т. д., стали возможными благодаря высокому уровню развития науки, в частности математики. С помощью задач нетрудно проиллюстрировать влияние уровня развития производительных сил на содержание и форму математической науки и обратное воздействие математики на естествознание и технику, ярко проиллюстрировать историю развития ведущих математических понятий, происхождение терминов, совершенствование символического языка и т. д.

Совершенно правильно указывал А. Я. Хинчин на то, что «история русской и советской математики богата фактами, знакомство с которыми, в особенности на фоне правильной исторической перспективы, способно возбуждать в нас законную радостную гордость. И среди этих фактов есть немало таких, понимание которых доступно учащимся средней школы в достаточной мере для того, чтобы они могли оценить их принципиальное или практическое значение»[3].

Постановка задач «с исторической фабулой» открывает немалые возможности и для осуществления научно-атеистического воспитания учащихся. Постановка задачи, формулировка (или способы решения) которой предложена тем или иным конкретным ученым, является естественным поводом к тому, чтобы, комментируя эту задачу или ее решение, рассказать учащимся о том, что идеализм и религия всегда задерживали развитие математики, что церковь на протяжении многих веков преследовала передовых ученых-математиков, которые осмеливались вести борьбу против идеализма и религиозного невежества.

---

[1] Энгельс Ф. Диалектика природы. М., 1975, с. 237.

[2] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 330.

[3] Хинчин А. Я. Педагогические статьи. Под ред. Б. В. Гнеденко. М., 1963, с. 154—155.

Так, например, постановка на внеклассных занятиях задачи решения О. Хайямом уравнений второй и четвертой степеней дает возможность учителю познакомить учащихся с жизнью и деятельностью выдающегося персидско-таджикского математика, философа и поэта Омара Хайяма. Трудно переоценить воспитательный эффект, который производит на школьников знакомство с О. Хайямом не только как с крупным математиком, но и глубоким мыслителем и поэтом, с человеком, осмелившимся в эпоху религиозного мракобесия высказывать идеи о материальном происхождении жизни и работать над воплощением этих идей в серьезных научных исследованиях.

Под эстетическим воспитанием обычно понимают систему знаний и навыков, относящихся к искусству, формам проявления прекрасного в окружающей нас действительности и приобретенных как в процессе обучения, так и во внешкольной деятельности. Сама природа математики предоставляет богатые возможности для воспитания у учащихся чувства красоты, в широком значении этого слова. Прежде всего речь идет о внутренней красоте самой математики: стройности ее конструкции, общности и доказательности ее положений, оригинальности в приемах и методах решения задач, широких возможностях различных исследований, неожиданности интерпретаций ее отдельных утверждений и т. п. Кроме того, отдельные свойства математических объектов, такие, как симметрия, сочетание элементов некоторой фигуры (изучение свойств правильных и полуправильных многогранников), соотношение размеров фигуры и т. п., способны пробудить у учащихся врожденное эстетическое чувство.

Ограниченность учебного времени далеко не всегда дает возможность учителю обратить внимание учащихся на эту сторону математики. Поэтому функция эстетического воспитания, заложенная (в явном или неявном виде) в той или иной задаче (или в способе ее решения), как правило, хорошо воспринимается учащимися. У каждого человека имеется врожденная склонность к красоте, и речь идет о том, чтобы развить эту склонность, сделать ее достоянием личности учащихся.

Немецкий психолог Г. Фехнер, изучая эстетические вкусы людей, провел любопытный эксперимент[1].

Из одинакового материала было вырезано десять изопериметрических прямоугольников со следующими отношениями их смежных сторон:

1) $1 : 1 = 1$; 2) $6 : 5 = 1{,}2$; 3) $5 : 4 = 1{,}25$; 4) $4 : 3 = 1{,}(3)$; 5) $29 : 20 = 1{,}45$; 6) $3 : 2 = 1{,}5$; 7) $34 : 21 \approx 1{,}62$; 8) $23 : 13 \approx \approx 1{,}77$; 9) $2 : 1 = 2$; 10) $5 : 2 = 2{,}5$.

[1] См.: Миковский В. Л. Об элементах эстетического воспитания на уроках математики. — «Математика в школе», 1963, № 4, с. 27.

Каждому из участников эксперимента было предложено указать прямоугольник, который кажется ему наиболее красивым.

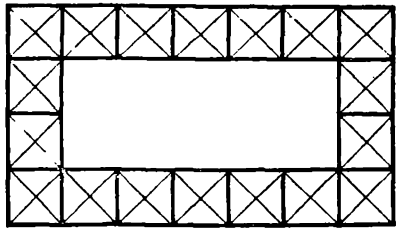


Рис. 39

Большинство участников выбрали прямоугольник с отношением сторон 34 : 21 или близким к нему. Но именно у таких прямоугольников длина большей стороны приближенно равна среднему геометрическому между полупериметром прямоугольника и длиной его меньшей стороны. Так, для прямоугольника с отношением сторон 34:21 имеем:

$$\frac{\sqrt{p}}{a} = \frac{55}{34} \approx 1{,}618, \quad \frac{a}{h} = \frac{34}{21} \approx 1{,}619.$$

Опыт Г. Фехнера явился подтверждением свойства, замеченного еще в древности: прямоугольник со сторонами, приближенно равными частям отрезка, разделенного в крайнем и среднем отношении, наиболее приятен для зрительного восприятия.

Не менее важными в эстетическом отношении являются так называемые «изящные решения» какой-либо задачи, а также возможность проявления школьником собственного творчества в процессе решения. Восприятие эстетической стороны решения задачи доступно почти каждому школьнику при условии, что учитель поощряет усилия учащегося в поисках оригинального или рационального решения и постоянно эстетически оценивает найденные учащимися решения. Так, например, учащимся не может не доставить эстетического удовольствия изящное решение следующей задачи.

З а д а ч а 2. Найти прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, а площадь численно равна периметру.

Р е ш е н и е. Искомый прямоугольник состоит из единичных квадратов (клеток). По сторонам прямоугольника выделим каемку шириной в одну клетку (рис. 39). Нетрудно усмотреть, что нельзя установить взаимно-однозначное соответствие между клетками каемки и линейными единицами контура, так как в контуре всегда на 4 (элемента) единицы больше.

Учитывая условие задачи, можно сделать вывод о том, что оставшееся «ядро» прямоугольника должно содержать 4 клетки, которые можно представить в виде прямоугольника только двумя способами: 2 · 2 и 4 · 1. Окаймляя это «ядро», получим два возможных решения задачи (рис. 40).

Опыт убедительно свидетельствует о том, что любая из воспитывающих функций задач может быть успешно реализована лишь тогда, когда у школьника возникает интерес к данной задаче,

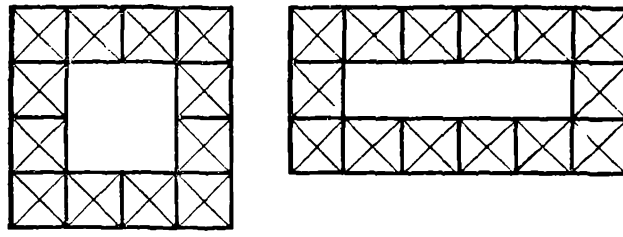


Рис. 40

устойчивая потребность решить ее. На основе формирования и развития интереса школьников к решению задач может быть возбужден и сформирован интерес к изучению самого учебного предмета. Понятно, что справедливо и обратное утверждение — устойчивый интерес к самому учебному предмету обычно переносится на решение задач. Прежде всего следует обратить внимание на то, что интерес к математике через решение задачи вырабатывается тогда, когда школьнику понятен ее смысл, когда она интересна по содержанию или методам решения, когда школьнику представляется возможность в процессе ее решения самому подумать, самому сделать вывод, обобщение и т. п. и когда он понимает полезность своего труда. О последнем в практике обучения нередко забывается. Ограничимся одним примером. Известно, какое большое (по времени и объему) место занимает решение задач и выполнение упражнений, связанных с тождественными преобразованиями. В 1974/75 учебном году одной из групп восьмиклассников, занимающихся в ЮМШ при МОПИ им. Н. К. Крупской (т. е. учащимся, проявляющим к изучению математики повышенный интерес и способности), был предложен вопрос: как понимают учащиеся цель овладения техникой тождественных преобразований (для чего нужно уметь выполнять тождественные преобразования различных выражений)? Ответы учащихся были весьма показательны. Из шестнадцати человек четверо дали ответ, который можно признать близким к правильному: «ускорить, упростить решение задач и упражнений». Шесть человек видели цель тождественных преобразований весьма узко: в ускорении и упрощении решения уравнений и неравенств. Один из этих учащихся указал, что тождественные преобразования нужны для решения уравнений, один — для упражнений в применении законов действий. Четверо не смогли ответить на этот вопрос совсем. Если учесть тот факт, что опрашивались лучшие учащиеся, то комментарии излишни. Кстати говоря, ни один из них не продемонстрировал хорошей техники владения навыками тождественных преобразований. Трудно себе представить, чтобы соответствующие упражнения могли бы в данной ситуации способствовать и развитию интереса к изучению математики вообще и решению задач в частности.

В традиционном обучении математике формирование интереса школьников посредством решения задач осуществлялось в основном через занимательность, увлекательность, необычность, неожиданность и т. п. специально заложенных в фабуле той или иной математической задачи или в способе ее решения. Конечно же, решение подобных задач было небесполезным, так как возбуждало любознательность и удивление у школьников. По этому поводу известный французский физик Луи де Бройль писал, что современная наука — «...дочь удивления и любопытства, которые всегда являются ее скрытыми движущими силами, обеспечивающими ее непрерывное развитие»[1].

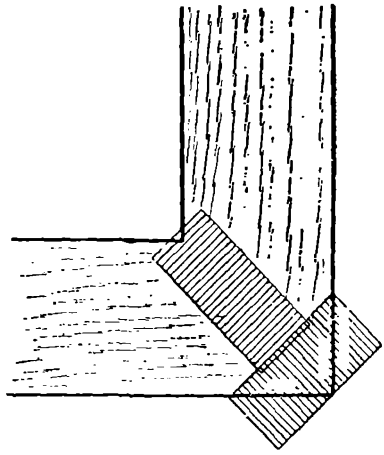


Рис. 41

Занимательность задач чаще всего проявлялась в самой фабуле решения; несколько реже — в оригинальности способа, которым она могла быть решена.

Вот несколько типичных примеров задач с занимательной фабулой.

З а д а ч а 3. Канал шириной 3,5 *м* имеет поворот (рис. 41). Как организовать переправу через него, если имеются две доски, но длина каждой из них только 3 *м*?

З а д а ч а 4. Во сколько раз лестница на шестой этаж дома длиннее лестницы на второй этаж этого дома?

З а д а ч а 5. За книгу заплатили 1 рубль и еще половину стоимости книги. Сколько стоит книга?

Занимательность, заложенная в самой фабуле задачи, выигрышна тем, что у школьника пробуждается интерес к задаче и желание ее решить сразу после того, как он ознакомится с ее условием. Однако сразу усматриваются и негативные стороны в этом приеме возбуждения у школьников интереса к задаче. Во-первых, занимательность такого рода является обычно чисто внешней; математическая сущность может оказаться даже тривиальной. Во-вторых, задачи с занимательной фабулой не являются (и правомерно) характерными в повседневной учебной деятельности школьника. Задачи учебника невозможно (да и нецелесообразно) делать внешне занимательными.

Постановка таких задач (и то в небольшом числе) оправдана либо во внеклассной работе по математике, либо в целях развития определенных качеств, образующих математический стиль мышле-

[1] Луи де Бройль. По тропам науки. М., 1962, с. 289.

ния. Поэтому занимательность, заложенная в способе решения той или иной задачи, представляется более продуктивной для формирования интереса школьников к решению задач. Вот характерный пример такой задачи.

З а д а ч а 6. Изобразите на рисунке произвольный набор фигур (квадратов, треугольников, кругов). Зачеркивайте по паре фигур, заменяя зачеркнутую пару одной фигурой по следующим правилам (независимо от порядка фигур в паре):

$$(\triangle, 0) = \triangle, \quad (\triangle, \square) = 0, \quad (\square, 0) = \square,$$
$$(0,0) = 0, \quad (\square, \square) = \triangle, \quad (\triangle, \triangle) = \square.$$

В результате в наборе останется одна фигура. Объясните, почему форма этой оставшейся фигуры не зависит от порядка выбора пар для очередного зачеркивания? Найдите способ быстрого нахождения формы последней фигуры.

Приступая к опытному вычерчиванию фигур и их замене другой фигурой в соответствии с условием задачи, мы сразу замечаем следующее: зачеркивание пары фигур с заменой этой пары одной фигурой напоминает известные нам алгебраические операции (арифметические действия), где по двум данным компонентам находится третий — результат операции. Например, для умножения натуральных чисел имеем $a \cdot b = c$; если $a \in N$, $b \in N$, то $c \in N$. Зачеркивание фигур обладает многими свойствами, похожими на свойства умножения чисел: $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ и т. д. В самом деле, $(\square, \triangle) = (\triangle, \square) = 0$, $(\triangle, 0) = \triangle$, $(\square, 0) = \square$ и т. д. Поэтому форма оставшейся фигуры не зависит от порядка зачеркивания в силу имеющего места переместительного закона этой необычной операции.

Одним из наиболее быстрых способов нахождения формы оставшейся фигуры будет такой: а) зачеркиваем все круги (без замены); б) зачеркиваем все тройки квадратов или треугольников.

И опять-таки задачи с оригинальными решениями нетипичны для повседневной учебной работы. Их содержание часто выходит далеко за рамки программного материала, а процесс их решения часто требует немалого времени.

В заключение отметим, что существуют задачи, в которых внешняя занимательность (выраженная фабулой, необычной постановкой вопроса и т. п.) удачно сочетается с занимательностью внутренней (выраженной сущностью самой задачи, ее содержательностью), решение которых требует проявления творческих способностей. К числу таких задач принадлежит, например, следующая задача, предлагавшаяся на одной из лингвистических олимпиад.

З а д а ч а 7. Известны написание и перевод следующих четырех фраз, сказанных на незнакомом нам языке:

akupenda — он любит тебя;
awapenda — он бьет их;
nikupida — я бью тебя;
atupenda — он любит нас.

Записать на том же языке фразу «я люблю их». Побуквенный анализ данных слов не приводит к цели, в то время как анализ связей между речевыми слогами быстро приводит к успеху:

aku — он тебя (*a* — он, *ku* — тебя);	*penda* — любить;
atu — он нас (*a* — он, *tu* — нас);	*pida* — бить.
niku — я тебя (*ni* — я, *ku* — тебя);	
awa — он их (*a* — он, *wa* — их)	

Поэтому *niwapenda* — искомая фраза.

Задача хороша, но все же это олимпиадная задача.

Наиболее оптимальным и эффективным путем, формирующим интерес школьников к математике (и решению задач), является приобщение их к творческой математической деятельности вообще, воспитание у школьников вкуса к такой деятельности, приобщение к радости самого процесса решения задачи, возбуждение у них чувства удовлетворенности, гордости при достижении поставленной цели.

«Развить творческие потенции ученика можно, только непосредственно включая его в творческую деятельность. Никакой рассказ о ней и даже показ ее не может научить творчеству. Как бы хорошо ни было поставлено сообщение учащимся готовых знаний посредством объяснительно-иллюстративного метода, оно не обеспечит развития творческого мышления и познавательной самостоятельности учащихся. Чтобы включить учащихся в творческую деятельность, нужна система познавательных задач поискового характера»[1].

При решении задач в процессе обучения математике можно сформировать у школьников творческую активность наряду с реализацией одной из основных целей обучения математике — формированием той системы ведущих математических знаний, умений и навыков, которая предусмотрена программой и отражена в учебниках математики.

Понятно, что возбуждение и развитие интереса школьников к решению задач (а значит, и к изучению математики) не приходит само собой. Одним из средств формирования такого интереса является постановка задач-проблем и приобщение школьников к творчеству на любом (и в том числе программном) материале.

Еще в начале нашего века известный немецкий педагог-математик М. Симон писал: «Свободное творческое упражнение собственных умственных способностей; самостоятельное или принимаемое за самостоятельное решение задач, будь то задачи на построение, составление уравнений, нахождение теорем и доказательств; испытываемая при этом учениками радость творчества, — от что составляет самый важный в воспитательном отношении

[1] Маркушевич А. И. Совершенствование образования в условиях научно-технической революции. — В сб.: Проблемы социалистической педагогики. М., 1973, с. 235.

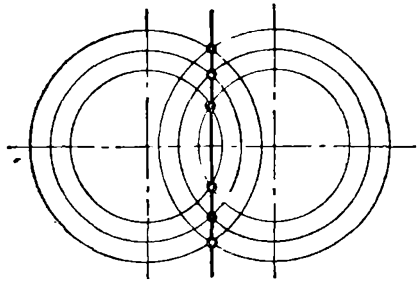


Рис. 42

элемент обучения математике, присущий почти только ему, если оставить в стороне сочинения в старших классах»[1].

Важно отметить, что такого рода деятельность определенным образом может быть запрограммирована, если школьнику предложена для решения задача творческого характера.

Представляется нецелесообразным, как это делают иногда в некоторых западноевропейских школах, пускать творческую деятельность учащихся на самотек, а учителю превращаться в рыболова, «выживающего съедобную рыбу из мутной воды». Вот характерный пример такой методики организации работы учащихся в условиях «свободного» творчества, приводимый К. Гаттеньо, ратующим за такую форму обучения[2].

Пусть у каждого из учащихся имеется только циркуль, с помощью которого они могут вычертить окружность, ограничивающую некоторую часть плоскости. Конструируя внутри окружности различные фигуры (треугольники, шестиугольники и т. п.), школьники могут открывать новые свойства этих фигур, опираясь на обычное наблюдение и опыт. Изучение свойств самой окружности также происходит непосредственно (неявно) в процессе работы только одним циркулем. Использование лишь одного циркуля позволяет учащимся самостоятельно выделить некоторое семейство кругообразных фигур и установить его свойства: симметрию по отношению к центру, концентризм, понятие связки окружностей, деление окружности и круга на равные части, отображаемые одна на другую с помощью вращения, и т. д. Поворотным пунктом, имеющим особое познавательное значение, является выход в процессе деятельности за границы первоначального круга, который ранее служил в качестве рабочего пространства.

Учитель предлагает школьникам вычертить два семейства концентрических окружностей с центрами, удаленными друг от друга на небольшое расстояние (рис. 42). Увеличивая длину радиусов окружностей, учащиеся обнаруживают, что точки пересечения соответствующих пар окружностей лежат на одной прямой. Этот учебный эксперимент очень эффектен; возможность и потребность в проведении прямой возникает весьма естественно. Без большого труда учащиеся обнаруживают тот факт, что все точки этой прямой находятся на равном расстоянии от центров и что всякая пара

[1] Симон М. Дидактика и методика математики в средней школе. Пг., 1917, с. 47.

[2] См.: Гаттеньо К. Педагогика математики. — В сб.: Преподавание математики (пер. с франц. А. И. Фетисова). М., 1960, с. 136—137.

окружностей равного радиуса того же семейства дает точки пересечения на той же прямой. Наступает естественный момент введения линейки (прямой линии и отрезка). Прямая и отрезок (и их простейшая модель-линейка) используются теперь как инструмент; в данном случае для соединения обоих центров. Дополненная таким образом фигура приводит учащихся к новым самостоятельным открытиям: окружности пересекаются, если их радиусы имеют длину, большую половины расстояния между центрами; линия их центров является их осью симметрии, некоторые отрезки ранее построенной прямой делятся этой линией центров на две конгруэнтные части и т. д.

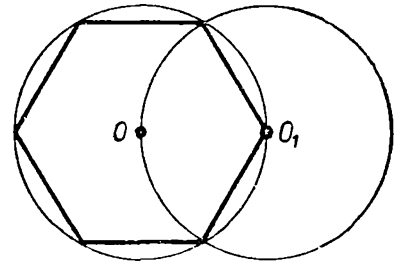


Рис. 43

Соображения симметрии подскажут учащимся, что углы в точке пересечения прямых конгруэнтны, а перегибание убедит их в том, что они могут быть наложены друг на друга. Учителю остается лишь ввести понятие о прямом угле, перпендикуляре и соответствующие им термины.

Учитель предлагает учащимся возвратиться к исходному кругу и вписанному в него, например, шестиугольнику (рис. 43), который нельзя было полностью построить при помощи одного циркуля, но вершины которого были уже ранее найдены. Новая фигура — шестиугольник и его диагонали открывают перед школьниками широкие возможности для новых предложений и вместе с тем знакомят их с различными видами многоугольников, с понятием конгруэнтности соответствующих фигур, которое устанавливается посредством вращения фигур вокруг центра. Абстрагируясь от этих конкретных фигур и свойств, учащиеся усматривают независимость своих выводов от размеров первоначальной окружности, от положения первой вершины шестиугольника, от вращения окружности вокруг центра, от положения окружности на листе бумаги или в пространстве.

Следующая фаза изучения связана с использованием круга того же радиуса с центром в одной из вершин шестиугольника (рис. 43). В этом случае одна из диагоналей шестиугольника становится общей хордой. Задача получает дальнейшее развитие — фиксируется одна из окружностей, и изменяется радиус другой. Возникают результаты, касающиеся хорд и диаметра (биссекция, ортогональность, длина как монотонная функция расстояний от центра и т. д.). Отсюда естественно вытекают условия построения треугольника и его симметрия и т. д.

Очевидно, что в обычном обучении, регламентируемом жесткими рамками учебного времени, программы и учебника, явно нецелесообразно допускать столь широкий и столь свободный поиск

при изучении школьниками программного материала; учащиеся способны в подобном поиске зайти вперед так далеко, что систематизировать их знания окажется попросту невозможно. Фрагменты такого рода творческой деятельности школьников иногда могут иметь место разве только на внеклассных занятиях.

По существу же постановка учебных задач (или заданий) творческого характера может быть осуществлена повсеместно. Уже на уровне начального обучения дети часто сталкиваются с различными проблемными ситуациями, которые побуждают их к самостоятельной деятельности математического характера. Так, обычное распределение тетрадей, учебников или карандашей может стать для учащихся I класса проблемой, если спросить их, хватит ли учебных принадлежностей для всего класса. Важно отметить, что выявление таких проблем и решение их часто не являются самоцелью, выступая в тесной связи с обыденной деятельностью, близкой детям.

Миниатюрные учебные проблемы целесообразно ставить перед школьниками по ходу изучения программного материала, попутно; они могут выступать в форме обычных вопросов к учащимся, таких, как:

1) Почему треугольник назван треугольником? Можно ли дать ему другое название, также связанное с его свойствами?

2) Как можно объяснить название «развернутый угол»?

3) Как бы вы назвали треугольник, у которого один угол прямой (вопрос задается до ознакомления с этим термином)? и т. п.

Создание таких (и более сложных) учебных проблемных ситуаций на уроке математики и на внеклассных занятиях — оправдавший себя на практике дидактический прием, посредством которого учитель держит в постоянном напряжении одну из побудительных внутренних мотивов процесса обучения — детскую любознательность. Именно на это обращает внимание Б. В. Гнеденко: «Потеря интереса к обучению на каком-то этапе рождает безразличие и апатию, безразличие рождает лень, а лень — безделье и потерю способностей. Вот почему важно продумать курс математики так, чтобы его изучение было интересно, содержание было современно, будило мысль и развивало способности, а также открывало пути как в научную, так и в практическую деятельность»[1].

Ясно, что задачи-проблемы требуют для своего решения значительного времени, и потому более сложные (для учащихся) учебные проблемы не ставятся непосредственно на уроках.

В целях развития устойчивого интереса учащихся, воспитания у них стремления к самостоятельному творчеству и, наконец, развития математического мышления постановка задач-проблем, требующих определенного времени для их обдумывания и решения, весьма желательна как на кружковых, так и факультативных заня-

[1] Гнеденко Б. В. О перспективах математического образования. — «Математика в школе», 1965, № 6, с. 5.

тиях. По существу для учителя (и для учащихся) важно не столько решение той или иной проблемы, сколько творческая работа над задачей, поиск ее решения, осмысливание полученных результатов и т. п. Именно в организации такого рода деятельности состоит важное средство развития интереса школьников к математике и через него воспитание многих ценных качеств мышления и личности школьника.

Следует отметить, что совсем не обязательно предлагать школьникам задачи-проблемы на материале, выходящем за рамки программного. Полезна и интересна для школьников постановка таких задач-проблем, которые построены на известном школьникам учебном материале и решение которых приводит не столько к расширению запаса знаний и опыта, сколько к их углублению.

Обратившись к собственному опыту работы, проиллюстрируем сказанное примером постановки серии задач-проблем, возникающих из известной школьникам стандартной задачи и поставленных на одном из занятий математического кружка в VIII классе школы № 352 Москвы.

В качестве исходной была принята известная задача: решить квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, в связи с которой перед учащимися был поставлен вопрос: что известно нам о решении и свойствах этого уравнения и подобных ему?

Было зафиксировано следующее:

а) $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

б) теорема Виета: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$;

в) если x_0 — корень уравнения, то $x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0$ — верное числовое равенство.

Учащимся было предложено подумать над тем, что можно было бы извлечь из этих знаний, какие интересные задачи можно было бы поставить в связи с решением этого конкретного уравнения. Самостоятельно и с помощью учителя школьники провели исследование, в ходе которого возникли и решались следующие задачи-проблемы:

1) Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Можно ли иначе, чем в учебнике, провести вывод формул Виета?

Одна из таких возможностей была реализована. Именно если x_1 и x_2 — корни данного уравнения ($x_1 \neq x_2$), то $x_1^2 - 5x_1 + 6 = x_2^2 - 5x_2 + 6$.

Из этого равенства можно получить следующие, ему тождественные:

а) $x_1^2 - 5x_1 = x_2^2 - 5x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 5x_1 - 5x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 5(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 5$;

б) $x_2^2 - 5x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2(x_2 - 5) = -6$; учитывая, что $x_2 - 5 = -x_1$, получаем: $x_2(-x_1) = -6$ или $x_1 x_2 = 6$.

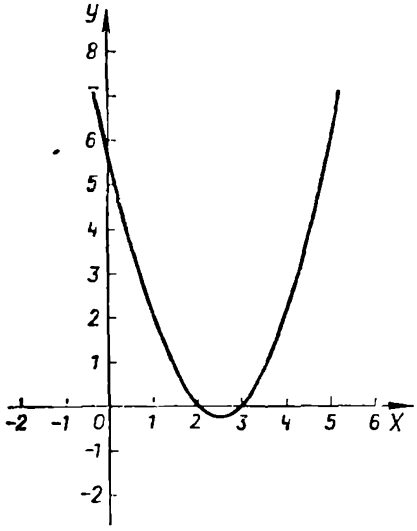


Рис. 44

2) Как можно решить данное квадратное уравнение, не прибегая к известному алгоритму его решения?

Учащиеся самостоятельно нашли способ сведения решения этого уравнения к системе уравнений, применив при решении теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + x^2 = 25 \\ 4x_1x_2 = 24 \end{cases}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = \pm 1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

$x_1 = 3,$ $x_1 = 2,$
$x_2 = 2.$ $x_2 = 3.$

Учитель попутно предложил учащимся дома подумать над следующим вопросом:

3) Нельзя ли распространить теорему Виета на уравнение вида $x^3 + px^2 + qx + l = 0$?

Работа продолжалась. Исследуется новый вопрос:

4) Какими интересными свойствами обладает квадратный трехчлен $f(x) = x^2 - 5x + 6$?

Учащимся предлагается подставить вместо x выражения $(5 - x)$, а затем $6/x$. Возникает следующее:

а) $(5 - x)^2 - 5(5 - x) + 6 = 25 - 10x + x^2 - 25 + 5x + 6 = x^2 - 5x + 6$;

б) $\left(\frac{6}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{6}{x}\right) + 6 = \frac{36}{x^2} - \frac{30}{x} + 6 = \frac{6x^2 - 30x + 36}{x^2} = \frac{6(x^2 - 5x + 6)}{x^2}$.

О чем говорят эти факты? (Проблема!)

Запишем в общем виде: $f(5 - x) = f(x)$, $f\left(\frac{6}{x}\right) = \frac{6}{x^2} f(x)$.

Не будет ли верным для любого квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ следующее: $f[-(p + x)] = f(x)$; (Проблема!) $f\left(\frac{q}{x}\right) = \frac{q}{x^2} f(x)$?

5) Как установить, при каких значениях x трехчлен $f(x) = x^2 - 5x + 6$ имеет наименьшее значение?

Рассмотрим схематический график этого трехчлена (рис. 44). Из наблюдений можно высказать гипотезу:

при $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_0 = f(x_0)$ минимально. В данном случае $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+2}{2} = 2{,}5$;

$f(2{,}5) = (2{,}5)^2 - 5 \cdot (2{,}5) + 6 = 2{,}5 \cdot (2{,}5 - 5) + 6 = 2{,}5 \times (-2{,}5) + 6 = -6{,}25 + 6 = -0{,}25$.

Возникает гипотеза: $x^2 - 5x + 6 \geqslant -0{,}25$. Методом восходящего анализа проводится доказательство этого неравенства: $x^2 - 5x + 6 \geqslant -0{,}25 \Leftarrow x^2 - 5x + 6{,}25 \geqslant 0 \Leftarrow (x - 2{,}5)^2 \geqslant 0$ — верное неравенство.

Будет ли при $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_0 = x_0^2 + px_0 + q$ минимальным значением этого трехчлена? (Проблема!)

Будет ли при $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $f(x_0) = x_0^3 + px_0^2 + qx_0 + l$ минимальным значением этого многочлена? (Проблема!)

6) Рассмотрим геометрический способ решения этого уравнения весьма древним способом, предложенным Омаром Хайямом[1]. О. Хайям для решения квадратных уравнений использовал тождественные преобразования (излагаемые обычным языком, так как алгебраическая символика была изобретена значительно позже) и соответствующие геометрические построения. Для нашего конкретного случая сущность этих преобразований в современном изложении выглядит так:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 5x = -6$, $x^2 - 2 \cdot 2{,}5x + 6{,}25 = -6 + 6{,}25$, $(x - 2{,}5)^2 = 0{,}25$,

откуда $(x - 2{,}5)^2 = 0{,}5^2$, или $(2{,}5 - x)^2 = 0{,}5^2$.

Проводятся геометрические построения, указанные на рис. 45. Разберитесь самостоятельно в рисунках. Поясните, как решается

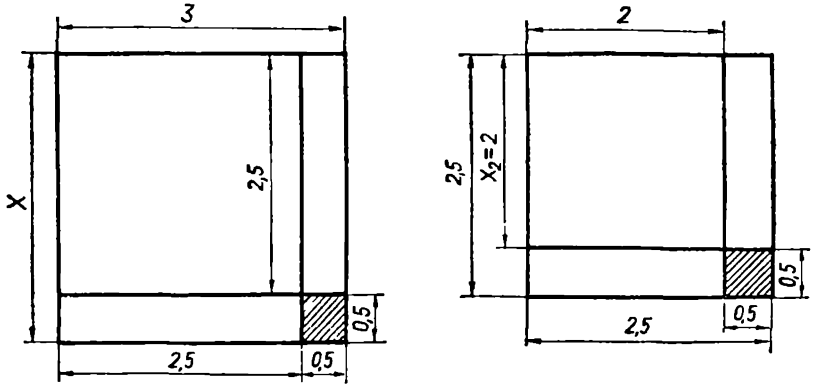


Рис. 45

[1] Попутно дается краткая историческая справка о жизни и деятельности О. Хайяма.

это уравнение геометрически. Попробуйте решить тем же способом другое квадратное уравнение.

К концу занятия был подведен краткий итог, в ходе которого внимание учащихся было обращено на следующее. Из примелькавшегося упражнения получено шесть интересных новых задач (и можно составить немало других). Воистину «золотые россыпи» задач лежат совсем рядом, нужно лишь обратить внимание на их поиск.

Рассмотренный пример проиллюстрировал методику воспитания у школьников интереса к более глубокому изучению даже известных им (и кажущихся, на первый взгляд, малоинтересными) математических фактов. Ясно, что возможна и постановка таких проблемных заданий, которые способствовали бы воспитанию интереса к более обобщенному, к более широкому взгляду на изученный школьниками учебный материал.

На внеклассных занятиях возможна и полезна постановка таких заданий, которые, расширяя круг знаний школьников в полезном направлении, являются в то же время интересными. Приведем для примера краткое содержание занятия математического кружка IV—V классов, проведенного автором на нетрадиционную тему топологического характера «Геометрия нитей».

а) Учащимся предлагается следующая задача.

З а д а ч а 8. Из Горького в Астрахань (и обратно) ежедневно, в один и тот же час, выходит по пароходу. По течению реки пароход проходит этот путь за 4 дня, а обратно (против течения) — за 5 дней.

1) Сколько пароходов встретит на своем пути до Астрахани пароход, вышедший из Горького?

2) Каково минимальное число пароходов, необходимых для обслуживания этого маршрута?

Напомнив школьникам изящное решение этой задачи графическим методом (рис. 46), учитель говорит о том, что решение задачи может быть проведено просто, если при этом использовать некоторые свойства своеобразной «геометрии нитей».

Учащимся раздаются тонко скрученные шнуры (нити) и предлагается сделать на этих шнурах произвольное число узлов (рис. 47), не связывая концы шнура между собой (на открытом шнуре). Далее каждому из учащихся предлагается подсчитать число узлов

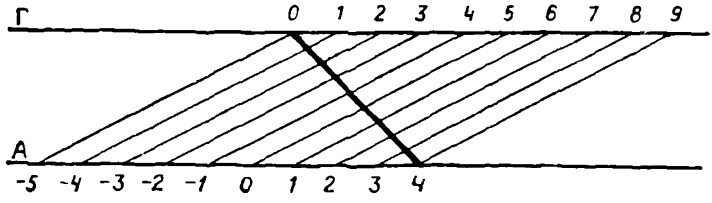


Рис. 46

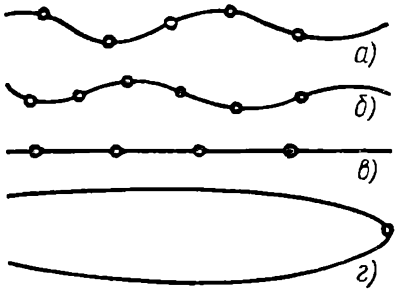


Рис. 47

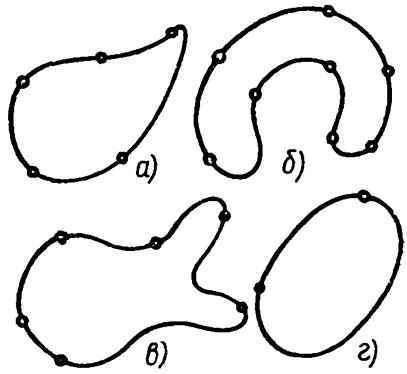


Рис. 48

и число промежутков между ними на своем шнуре, а результаты сообщить учителю для занесения их в следующую таблицу, изображенную на классной доске.

Для открытого шнура

Число промежутков, *П*	6	7	5	2	. .
Число узлов, *У*	5	6	4	1	. . .

Затем учащимся предлагается выполнить то же задание, связав предварительно концы шнура друг с другом (для замкнутого шнура) (рис. 48).

В результате проведенного опыта и подсчета заполняется новая таблица, изображенная на классной доске.

Для замкнутого шнура

Число промежутков, *П*	5	8	6	2 . .
Число узлов, *У*	5	8	6	2

Учитель предлагает учащимся самостоятельно подметить закономерность, связывающую число узлов с числом промежутков для открытого и замкнутого шнура. Учащиеся легко устанавливают, что для открытого шнура число узлов на единицу меньше числа промежутков, а для замкнутого шнура — равно числу промежутков.

Если число узлов обозначить буквой $У$, а число промежутков буквой $П$, то эти свойства можно записать математически следующим образом: $П - У = 1$ — для открытого шнура; $П - У = 0$ — для замкнутого шнура. Далее учащиеся самостоятельно устанавливают равенство $У - П = 1$ для открытого шнура с узлами на концах.

б) Теперь, говорит учитель, можно вернуться к решению задачи о пароходах.

Если обозначить узлами пароходы, идущие по данному маршруту в указанный отрезок времени, а промежутками считать отрезки пути, пройденные каждым пароходом за один день, то данная ситуация отвечает формуле $У - П = 1$.

В соответствии с условием задачи имеем: 1) $П = 4 + 5 = 9$; 2) $У - 9 = 1$, откуда $У = 10$; 3) $10 + 1 = 11$ (пароходов).

Ответ. а) Данный пароход встретит на своем пути 10 пароходов; б) для бесперебойного обслуживания данного маршрута нужно минимум 11 пароходов.

в) Используя эту зависимость, учащимся предлагается решить следующие задачи.

Задача 9. В ателье из куска ткани длиной 12 *м* решили сшить 4 костюма. Отрез на костюм имеет длину 3 *м*. Сколько разрезов куска ткани сделал закройщик?

Решение. Если ткань представить в виде отрезка, а места разреза—узлами (точками), то решение этой задачи сведется к нахождению узлов открытой нити. В нашем примере $П = 4$. Подставив $П = 4$ в формулу $П - У = 1$, получим $У = 3$.

Задача 10. Сколько столбов нужно установить на расстоянии 2 *км*, если расстояние между столбами должно быть 50 *м*? Решение этой задачи сводится к формуле: $У - П = 1$.

$П = 2000 : 50 = 40$; $У - 40 = 1$; $У = 41$ (столб).

Задача 11. Сколько стоек нужно для ограждения земельного участка прямоугольной формы, если длина участка равна 120 *м*, а ширина 60 *м*, причем стойки нужно установить через каждые 3 *м*?

Решение. Прежде всего найдем периметр участка: $2 \cdot (120 + 60) = 360$ (*м*).

Решение этой задачи сводится к случаю $П - У = 0$. Следовательно, $П = У = 360 : 3 = 120$, откуда $У = 120$ (стоек).

г) Теперь имеется возможность обобщить эти задачи рассмотрением ситуаций, изображенных на рис. 49.

Учитель указывает, что в случаях в), г) и д) наряду с промежутками и узлами на шнуре (нити) следует рассмотреть и области, ограниченные этими нитями (эксперимент ведется на поверхности стола, т. е. на плоскости). Изучив эти ситуации, учащиеся опытным путем устанавливают известную теорему Л. Эйлера (рис. 49): $У - П + Г = 2$ (где $Г$ — число плоских областей).

Учитель обращает внимание учащихся на необходимость учи-

тывать при подсчете и внешнюю (бесконечную) область на плоскости.

д) Эти ситуации могут быть далее рассмотрены в пространстве также при помощи модели шнуровой (нитяной) корзины (рис. 50).

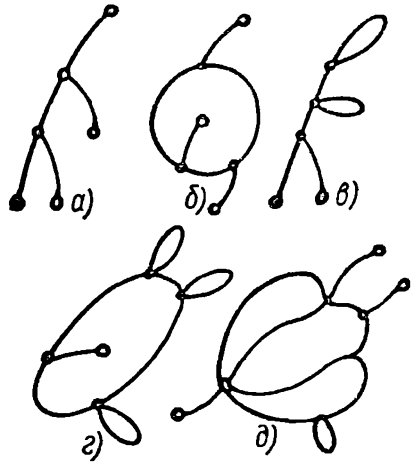


Рис. 49

Опыт изучения элементов топологии (в рамках которого рассматривался и этот вопрос) с помощью специально подобранных заданий проблемного характера, выступающий в виде определенного комплекса задач, полностью себя оправдал. Интерес школьников (напомним,что опыт проводился в четвертых классах) к математике значительно возрос; у них возникла потребность в деятельности творческого характера[1].

Практически не столь важно да и в настоящее время вряд ли возможно дать сколько-нибудь полную характеристику понятию творческой задачи. Более важным представляется установить, какие задачи в процессе обучения математике можно отнести к задачам творческого характера, т. е. таким задачам, решение которых потребует от учащегося деятельности, в большей или меньшей степени характеризуемой как творческая. Здесь имеет смысл сделать важную оговорку. Как уже было показано ранее, задача возникает в результате особого вида контакта человека и задачной системы, при этом даже простое соотнесение той или иной задачи к стандартным или нестандартным зависит главным образом от решающего, от состояния его знаний, опыта и т. п.

Поэтому в процессе изучения учащимися курса математики следует систематически ставить задачи (или серии задач), которые, помимо обучающих функций, несли бы в себе функции, реализация которых могла бы обеспечить формирование элементов творческого математического мышления наряду с усвоением

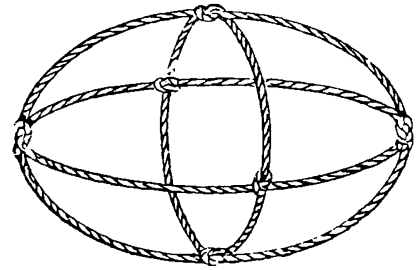


Рис. 50

[1] См.: Аидронов И. К., Колягин Ю. М., Мокрушин Е. Л., Беляева Е. С. Математика (множества, числа, фигуры, операции). Экспериментальное учебное пособие для IV класса общеобразовательной средней школы. М., 1969, с. 195—215.

учебного материала. Например, такие задачи, в процессе решения которых:

учащиеся побуждаются к поиску мотивации целесообразности изучения новых математических понятий и предложений, разумности определений, полезности изучения тех или иных свойств математических объектов, эффективности использования математических моделей для изучения объектов и явлений реальной действительности и т. п.;

учащиеся побуждаются к самостоятельному открытию того или иного математического факта, к обоснованию того или иного положения, к установлению возможности применения уже усвоенных ими знаний в новой для них ситуации и т. п.;

учащиеся подводятся к самостоятельному открытию методов доказательства математических утверждений, приемов решения задачи, к установлению новых связей между известными им математическими понятиями и т. п.;

у учащихся формируются умения использовать ведущие методы научного познания (опыт, наблюдение, сравнение, анализ, обобщение и т. д.) как методы самостоятельного изучения математики, понимание роли и места индукции, аналогии, дедукции в процессе познания;

учащиеся приобщаются к самостоятельным поисковым исследованиям (посредством изучения результатов решения задач, изменения условия задачи, возможных обобщений, отыскания других способов ее решения и отбора того из них, который наиболее полно удовлетворяет заданным условиям и т. п.);

у учащихся формируются качества, присущие научному мышлению (активность, гибкость, глубина, критичность, доказательность и т. п.), умение выражать свою мысль ясно и точно и т. п.

Практическая возможность использования указанных рекомендаций обусловлена возможностью использовать для этой цели задачи, помещенные в учебниках. Незначительная методическая обработка условия той или иной задачи, изменение места и времени ее постановки существенно меняют тип задачи, оставляя неизменным ее фактическое содержание.

Приведем теперь несколько примеров задач творческого характера, постановка которых на внеклассных занятиях была весьма успешной.

Приводя примеры таких заданий, приведем и их возможные решения там, где они, на наш взгляд, могут дополнить характеристику той или иной задачи.

З а д а н и е 1. 1) При проведении командных соревнований по шашкам между двумя пятыми классами были выделены команды по 4 человека и было решено, что каждый участник сыграет с каждым один раз. Однако в день соревнований один из участников заболел и в команде V Б класса оказалось 3 человека. Тем не менее соревнование было проведено. Сколько партий было сыграно?

Р е ш е н и е. Занумеруем участников соревнований VA класса: 1, 2, 3, 4; VБ класса — 5, 6, 7.

Тогда проведенные игры можно представить в виде пар: (1,5); (1, 6); (1, 7); (2, 5); (2, 6); (2, 7); (3, 5); (3, 6); (3, 7); (4, 5); (4, 6); (4, 7).

Всего было сыграно 12 партий.

2) Рассмотрим два числовых множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Какие дроби можно составить, беря числителем число из множества A, а знаменателем — число из множества B? Сколько всего дробей можно составить, если использовать по назначению все числа из множества A и множества B? Запишите эти дроби. Сколько различных дробных чисел содержится среди этих дробей? Выпишите их.

Р е ш е н и е: $^0/_1$, $^1/_1$, $^2/_1$, $^3/_1$, $^4/_1$, $^5/_1$, $^0/_2$, $^1/_2$, $^2/_2$, $^3/_2$, $^4/_2$, $^5/_2$, $^0/_3$ $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_3$, $^4/_3$, $^5/_3$ (18 дробей);

$^0/_1$, $^1/_1$, $^2/_1$, $^3/_1$, $^4/_1$, $^5/_1$, $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^4/_3$, $^5/_3$ (13 дробных чисел).

3) При изготовлении авторучки данной модели корпус и колпачок ручки имеют одинаковый или разный цвет. На фабрике использовали пластмассу четырех цветов: белую, зеленую, красную и оранжевую.

Обозначим через A множество цветов корпуса ручки, а через B множество цветов колпачка.

Какие возможны сочетания цветов корпуса и колпачка ручки? Сколько таких сочетаний? Выпишите их.

Р е ш е н и е. $A = \{б; з; к; о\}$; $B = \{б; з; к; о\}$ $\{(б; б), (б; з), (б; к), (б; о), (з; б), (з; з), (з; к), (з; о), (к; б), (к; з), (к; к), (к; о), (о; б), (о; з), (о; к), (о; о)\}$ — 16 сочетаний цветов.

4) При решении каждой из этих трех задач мы имеем дело с двумя множествами A и B, из элементов которых составлялось новое множество C — множество всевозможных пар, в которых первый член пары брался из множества A, а второй — из множества B.

Эту операцию над множествами A и B называют прямым произведением множеств и обозначают знаком $\times$: $A \times B = C$.

При решении задачи 3 мы имели дело с одним и тем же множеством A, и поэтому результат операции обычно записывается так:

$$A \times A = A^2.$$

1) Как вы думаете, почему множество C назвали произведением множества A на множество B?

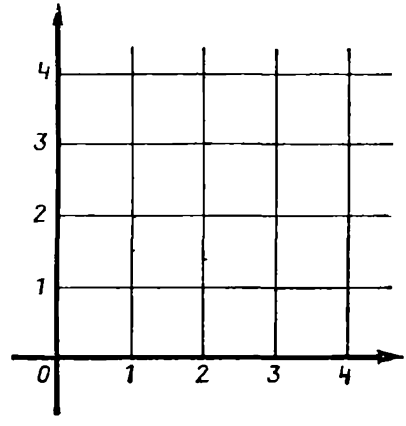


Рис. 51

2) Догадайтесь, как узнать число элементов конечного множества $C = A \times B$, не выписывая всех пар множества C?

3) Можно ли усмотреть решение первой задачи из рис. 51?

4) Как с помощью такого же рисунка решить задачи 2, 3?

Нетрудно обнаружить, что данное задание представляет собой пример того, каким образом учащиеся могут быть подведены к изучению новых понятий (в данном случае понятия прямого произведения множеств) так, чтобы это понятие естественным образом сформировалось у них (по крайней мере в своих существенных признаках) в ходе деятельности, имеющей творческий характер. Кроме того, этот пример показывает возможность (и желательность) программирования самой деятельности, осуществляемого учителем (учебником). В ходе обучения математике следует управлять творческим процессом, так как постановка каждого такого задания должна отвечать четко определенным целям обучения и воспитания на том или ином его этапе и укладываться в определенные временные рамки.

З а д а н и е 2. Вырежем из картона прямоугольник и проделаем в верхнем левом углу круглое отверстие (рис. 52). Существует четыре возможных положения этого прямоугольника с отверстием, которые указаны на рис. 52, *а*, *б*, *в*, *г*.

1. Какие перемещения нужно сделать с этим прямоугольником, чтобы он из начального положения *а* перешел в положение *б*? *в*? *г*?

Любое из этих перемещений прямоугольника обозначим знаком ✻. Тогда запись *в* ✻ *г* будет обозначать, что к прямоугольнику в положении *в* нужно применить такое перемещение, которое переводит прямоугольник из положения *а* в положение *г*.

В нашем случае с прямоугольником, взятым в положении *в*, выполним операцию осевой симметрии относительно горизонтальной прямой. В результате возникает положение *б*. Таким образом, *в* ✻ *г* = *б*.

2. Каков будет результат перемещения *б* ✻ *в*?

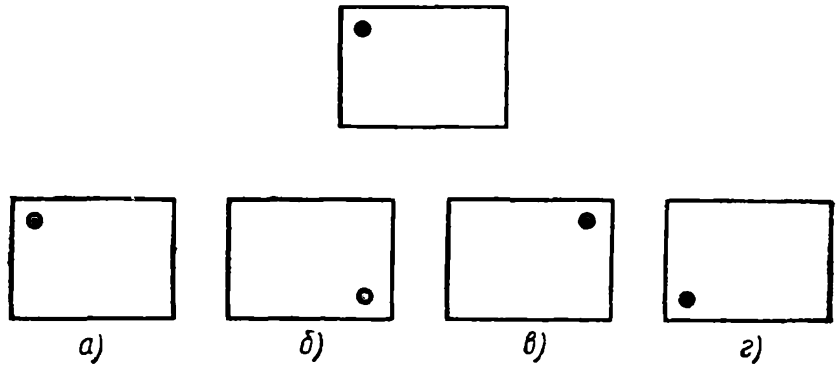


Рис. 52

3. Заполните таблицу результатов возможных перемещений этого прямоугольника (рис. 53).

⊛	*а*	*б*	*в*	*г*
а				
б				
в				*б*
г				

Рис. 53

Вспомним свойства сложения целых чисел:

1) В результате сложения двух целых чисел всегда получается целое число.

2) Сложение целых чисел подчиняется переместительному закону.

3) Сложение целых чисел подчиняется сочетательному закону.

4) В результате сложения любого целого числа с нулем получается то же число.

5) Для любого целого числа всегда найдется другое целое число, которое в сумме с первым дает число 0.

4. Запишите каждое из этих свойств с помощью букв (в общем виде); приведите примеры.

5. Проверьте, какие из этих свойств сложения целых чисел имеют место при перемещении данного прямоугольника в положения *а, б, в, г.* Если какое-либо свойство сложения целых чисел имеет место и для перемещений, постарайтесь обосновать его (объяснить, почему оно верно); если какое-либо свойство не имеет места, приведите пример, когда оно не соблюдается.

6. Проведите ту же проверку — сравнение свойств перемещения прямоугольника с отверстием, со свойствами умножения рациональных чисел.

7. Ответьте на вопросы 1—3 пунктов этого задания, используя модель квадрата с отверстием (рис. 54). В чем отличие решения этой задачи от предыдущей?

8. Придумайте сами задачу, похожую на те две, которые вы только что решили.

9. Какой вывод можно сделать из сравнения свойств перемещений со свойствами некоторых арифметических действий?

Приведенный пример задания показывает, каким образом может быть организована творческая деятельность учащихся, направленная на самостоятельное обобщение известного им материала, в ходе которого учащиеся широко используют методы научного познания (опыт, наблюдение, анализ и т. п.). Вместе с тем задание

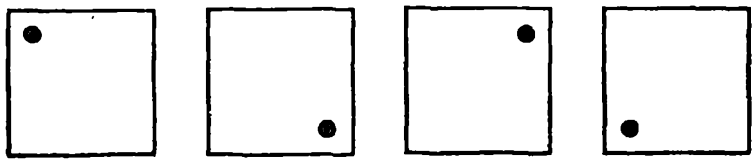


Рис. 54

имеет и целенаправленный дидактический характер (учащиеся вплотную подведены к восприятию понятия группы; то, что этот термин не введен, не имеет значения для существа дела). Опыт постановки этого задания в V—VI классах убедил нас в его доступности для учащихся даже этого возраста.

Задание 3. 1) В какую область мишени (рис. 55) нужно попасть и сколько выстрелов нужно сделать, чтобы выбить ровно сто очков?

Решение

Число	×2	×3	×4	×5
16	32	48	64	80
17	$\underline{34}$	51	68	85
23	46	69	$\underline{92}$	115
24	48	72	96	120
39	78	117	156	195
40	80	120	160	200

Только подчеркнутые числа в сумме составляют сто. Поэтому нужно сделать шесть выстрелов и попасть два раза в кольцо мишени с номером 16 и четыре раза в кольцо с номером 17.

2) В какую область мишени нужно попасть и сколько выстрелов нужно сделать, чтобы выбить 50 очков? 90 очков?

Решение. 1) $50 = 16 + 2 \cdot 17$; 2) а) $17 \cdot 3 + 39 = 90$; б) $16 + 23 + 3 \cdot 17 = 90$...

3) Каково максимальное число очков, делящихся на 17, можно выбить за пять выстрелов? Укажите план наиболее быстрого поиска ответа на этот вопрос.

4) Каково минимальное число очков, делящееся на 13, можно выбить за три выстрела? Укажите план наиболее быстрого поиска ответа на этот вопрос.

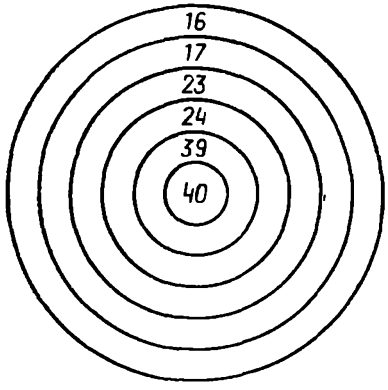


Рис. 55

Решение. $2 \cdot 24 + 1 \cdot 17 = 65$.

5) Двое метких стрелков соревнуются в стрельбе по этой мишени. Каждый должен сделать три выстрела и выбить 80 очков. Каждый не может стрелять в ту область мишени, которая уже выбита противником. Как выиграть в этом соревновании? Можно ли свести соревнование вничью?

Решение. 1) $16 \cdot 5 = 80$; 2) $40 \cdot 2 = 80$; 3) $23 + 17 + 40 = 80$; 4) $16 + 24 + 40 = 80$; 5) $2 \cdot 24 + 2 \cdot 16 = 80$.

Это задание также весьма богато как по своим дидактическим функциям (в частности, здесь могут формироваться навыки счета и вычисления), так и по функциям развивающим (планирование поиска, рационализация поиска, вкус к исследованию и т. п.).

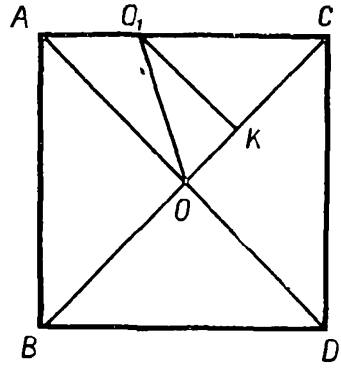


Рис. 56

Задание 4. Двое играют в такую игру: первый называет любое не равное нулю однозначное число. Второй прибавляет к нему еще какое-либо однозначное число и называет сумму. К этой сумме первый прибавляет еще какое-нибудь однозначное число и опять называет сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет 66. Как нужно играть, чтобы выиграть? Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или партнер?

Не будем приводить решения этой серии задач. Укажем лишь на то, что наряду с дидактическими функциями (главные из которых относятся также к формированию вычислительных навыков) задача представляет собой яркий пример ситуации, требующей (для решения возникающих из нее задач) изобретения метода решения (стратегии решения). То, что эта задача по своей форме относится к числу математических игр, делает ее не только интересной для учащихся, но и весьма полезной в практическом отношении.

Задание 5. В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата (углах поля) — 4 собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по контуру его (кольца их поводков накинуты на проволоку, идущую вдоль изгороди поля). Известно, что волк может справиться только с одной собакой.

Доказать, что собаки имеют возможность не выпускать волка за границу поля. Максимальная скорость бега каждой собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости бега волка.

Решение. 1) Предположим, что волк выбрал произвольный прямой маршрут (рис. 56) OO_1 ($|AO_1| < |O_1C|$) и бежит к краю поля. Пусть время, за которое он пробежит этот путь, равно t, а скорость равна v.

Тогда $|OO_1| = vt$. Проведем $[O_1K] \perp [BC]$. Ясно, что $|O_1K| < |O_1O|$, т. е. $|O_1K| < vt$.

Из $\triangle O_1CK$ следует $|O_1C| = |O_1K| \cdot \sqrt{2}$, а поэтому $|O_1C| < \sqrt{2}\,vt$.

Найдем время бега собаки из (более далекого от O_1) пункта C в пункт O_1:

$$t_c = \frac{S_c}{v_c} = \frac{|O_1C|}{1{,}5v}.$$

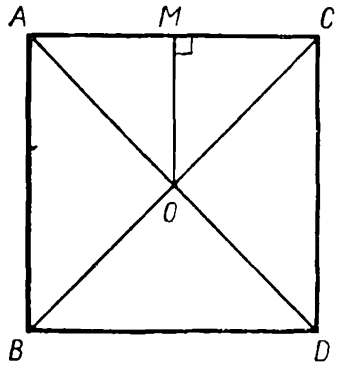


Рис. 57

Но

$$\frac{|O_1C|}{1{,}5v} < \frac{vt\sqrt{2}}{1{,}5v} = \frac{2\sqrt{2}t}{3} < t.$$

Следовательно, собака из C прибежит в O_1 раньше волка; понятно, что собака из пункта A будет в O_1 еще раньше.

2) Рассмотрим два предельных случая: а) волк бежит по маршруту OA; б) волк бежит по кратчайшему пути: $[OM] \perp [AC]$. Для первого случая имеем: если скорость движения волка v, время бега по маршруту OA равно t, то $|OA| = vt$.

Путь, который предстоит преодолеть собаке из C (собака в пункте A остается на месте), $|AC| = |OA|\sqrt{2} = vt\sqrt{2}$.

Скорость ее бега $1{,}5v$, а потому время бега:

$$t_c = \frac{vt\sqrt{2}}{1{,}5v} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t < t.$$

Учитывая, что собака из пункта B также успеет прибежать в A, волк встретит там трех собак.

Для второго случая имеем (рис. 57). Если время бега волка на пути OM равно t, скорость бега v, то $|OM| = vt$. Тогда путь каждой собаки (из пунктов A и C) одинаков: $|AM| = |CM| = |OM|$. Скорость бега собак $1{,}5v > v$, и потому обе собаки будут в пункте M раньше волка.

Два рассмотренных этапа решения исходят из того, что волк бежит по прямой. Но как будет обстоять дело, если волк будет менять траекторию бега? Если принято, что в некоторый момент времени волк будет в точке O_2, то сразу возникает сложность с определением местонахождения в этот момент времени каждой из собак.

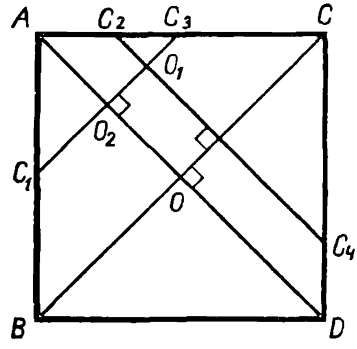


Рис. 58

Решение, подобное рассмотренному, провести не так просто (хотя и возможно). Понятно, что хорошо бы найти универсальное решение задачи, охватывающее сразу всевозможные случаи. Такое весьма простое решение имеется, хотя отыскать его далеко не просто. В его основе лежит идея о моделировании движения собак по контуру квадрата в виде движения проекций по его диагоналям.

В самом деле, пусть максималь-

ная скорость бега волка v, а собаки — 1,5 v. Пусть O_1 — произвольное положение волка внутри поля при попытке прорваться за его границы (рис. 58). Обозначим через O_2 проекцию положения волка на ближайшую диагональ.

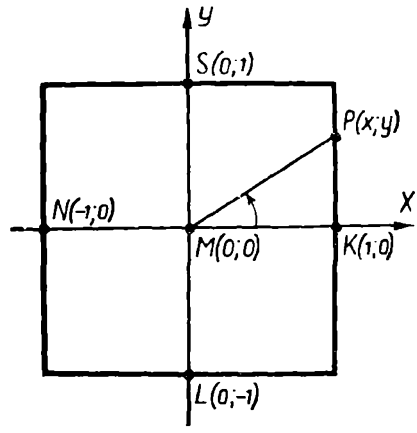


Рис. 59

Проведем через точку O_1 прямые, параллельные соответственно (AD) и (BC). Точки их пересечения с контуром квадрата C_1, C_2, C_3 и C_4 определят положение собак, при котором волк не сможет уйти. Действительно, скорость движения волка в любом направлении совпадает со скоростью движения проекции его положения на диагонали и не превышает v. Скорость движения собак моделируется как скорость движения точек C по контуру квадрата и не превышает $\sqrt{2}\,v$.

Но $\sqrt{2}\,v < 1{,}5\,v$. Поэтому две собаки успеют вовремя оказаться в точках C_2 и C_3 и не выпустят волка.

Мы видим, что эта задача наряду с весьма интересной для школьников (хотя, может быть, несколько искусственной) фабулой предусматривает необходимость поиска более общего решения, отправляясь от решения более непосредственного, но частного. Кроме того, в ходе решения этой задачи школьники учатся методу математического моделирования (хотя бы в весьма элементарном его понимании), а также обнаруживают, что исследование задачи может служить необходимым элементом ее решения.

З а д а н и е 6. Известно, что тригонометрические функции могут быть моделированы процессом движения точки по окружности радиуса R с центром в начале декартовой системы координат. Поэтому их часто называют круговыми функциями. Известно также, что процессом движения точки по эллипсу и гиперболе можно интерпретировать так называемые эллиптические или гиперболические функции. Более того, каждый из этих классов функций можно определить, исходя из соответствующей геометрической модели. Поэтому естественна мысль о том, что через движение точки по контуру других фигур, по-видимому, можно интерпретировать (или, проще того, определить) другие классы функций, аналогичных круговым.

Пусть, например, точка P (x, y) — переменная точка контура квадрата, расположенного в декартовой системе координат (рис. 59).

Определим квадратичные синус, косинус и тангенс следующим образом: $\operatorname{san}\varphi = x + y$; $\operatorname{cas}\varphi = x - y$; $\operatorname{tig}\varphi = x^2 - y^2$.

Исследовать каждую из этих функций. Установить формулы преобразований значений этих функций по аналогии с теми, какие имеют место для круговых функций. Построить графики этих функций.

Попытайтесь по-иному определить квадратичные функции. Попробуйте рассмотреть переменную точку на контуре соответствующим образом расположенных правильных треугольника и шестиугольника.

Опыт показал, что эту задачу полезнее было бы поставить и в несколько иной (менее жесткой) форме: предложить самим учащимся ввести определения, произвольно расположить систему координат. Такая постановка проблемы могла бы внести больше разнообразия и оригинальности в процесс решения задачи.

Известно, какое большое значение в процессе активного обучения придается мотивации обучения. В конкретном плане при изучении каждой темы школьного курса полезность изучения того или иного вопроса программы, разумность определения того или иного математического понятия, преимущество одного способа решения задачи над другим должны вскрываться не только самим учителем, но и учащимися. Нередко это можно сделать с помощью задач, несущих в себе мотивационную функцию. Так, например, при изучении определения параллельности прямых в VI классе полезна постановка специального учебного задания.

Как мотивировать разумность этого определения, объединяющего в одном понятии «параллельность» два внешне несхожих друг с другом случая взаимного расположения прямых на плоскости: полного совпадения прямых и отсутствие даже одной общей точки?

В книге для учителя «Геометрия в VI классе» указано, что тем самым отношение параллельности включается в более общий класс отношений эквивалентности и таким образом облегчается доказательство некоторых теорем. Однако для учащихся это не может звучать убедительно. Более убедительным является для них обнаружение общности этих двух случаев расположения прямых на плоскости. В самом деле, и в случае совпадения и в случае отсутствия общих точек расстояние от точек одной прямой до другой постоянно (численное значение расстояния равно или не равно нулю); в случае пересекающихся прямых это расстояние является переменной.

Важно здесь то, что подобного рода мотивировку определения понятия могут отыскать сами школьники при постановке перед ними соответствующей задачи (конечно, если учитель соответственно направит их поиск).

Итак, в условиях воспитывающего обучения математике постановка задач должна быть такой, чтобы прививать школьникам вкус к самостоятельным исследованиям, к проявлению изобретательности, пробуждать положительные эмоции как в процессе решения задач, так и при достижении его результата. Именно при

решении задач школьник имеет возможность испытать напряжение мысли, приводящее к открытию, насладиться ощущением победы, испытать радость от упорного труда, направленного на преодоление трудностей. «Такие эмоции, пережитые в восприимчивом возрасте, могут пробудить вкус к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере»[1].

Трудно переоценить воспитательное значение учебной деятельности школьников, проявляющееся при решении задач. Именно здесь учащийся учится не только творчески мыслить, но и активно применять полученные знания. Последнее, по мнению А. Я. Хинчина, является необходимым условием для воспитания общей культуры мышления, к которой, в частности, относятся правильность мышления, выражающаяся в полноценности аргументации, стиль мышления, которым в значительной степени определяется отчетливость теоретических связей, простота и ясность научных конструкций и многое другое, моральные качества — честность и правдивость, настойчивость и мужество[2].

4. ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО КОНТРОЛЯ И ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

С современной точки зрения всякое изучение предполагает не только понимание, запоминание и усвоение, но и активное использование полученных знаний в ходе дальнейшего изучения и в практике. Однако, несмотря на указанные выше качественные изменения, основная структура процесса познания, осуществляемого в ходе обучения, осталась неизменной: получение и переработка учебной информации, контроль за процессом ее усвоения и оценка качества усвоения. На неразрывность этих двух сторон процесса обучения правильно указал известный советский психолог П. Я. Гальперин: «Во первых, его (контроля) результатом является оценка только того, что делается и сделано другими продуктивными, производственными видами деятельности: поэтому он не составляет отдельного продукта (по наличию которого мы обычно и заключаем об отдельной психической функции). Во-вторых, он никогда не выступает поэтому как вполне самостоятельная деятельность, а всегда лишь вместе с какой-либо другой деятельностью, на процесс и результаты которой он направлен»[3].

Опыт показывает, что контроль и оценка знаний, являясь средством проверки достоверности и эффективности приобретаемых

---

[1] Пойа Д. Как решать задачу. М., 1961, с. 5.

[2] См.: Хинчин А. Я. Педагогические статьи. Под ред. Б. В. Гнеденко. М., 1963, с. 130—153.

[3] Гальперин П. Я. Управление процессами учения. Новые исследования в педагогических науках. Вып. IV. М., 1965, с. 28.

учащимися знаний, играют особо важную роль в процессе обучения и серьезно влияют как на ход самого обучения, так и на его результат.

Как и ранее (а в последнее время особенно), учителя математики испытывают серьезные затруднения, связанные с контролем и оценкой знаний, умений и навыков школьников, изучающих математику. Трудности усугубляются и тем, что переход на новое содержание обучения изменил и уровень требований, предъявляемых к знаниям, умениям и навыкам учащихся, и во многом обесценил накопленный учителями практический опыт их оценки. Поэтому в настоящее время в практике работы учителей математики нередко наблюдаются случаи занижения или завышения требований. Однако новых норм оценок знаний по математике школа до сих пор не получила и, хотя разработка такого документа — дело времени, даже его появление, на наш взгляд, не решит этой проблемы полностью. Более, чем нормы оценок, важны общие критерии, согласно которым было бы ясно, какой объем, содержание и уровень ответов школьников на уроках или при выполнении ими контрольных работ следует считать отличным, хорошим и удовлетворительным на каждом этапе обучения.

Первым важным требованием к эффективности оценки знаний учащихся по математике является следующее. Контроль и оценка знаний должны быть такими, чтобы показать не только то, что усвоено школьником на том или ином этапе обучения, но и то, как глубоко (сознательно и прочно) усвоен (усваивается) им тот или иной факт, понятие, процесс, операция. Контроль и оценка математических знаний определяются прежде всего общими и конкретными целями обучения, воспитания и развития.

Конкретные цели обучения жестко определены программой (а конкретные цели развития и воспитания должны быть четко определены в объяснительной записке к ней). Общие же цели обучения, воспитание и развитие школьников, т. е. общие цели школьного обучения математике, представляют собой некую подсистему общих целей, соответствующую современным требованиям, предъявляемым к образованию на данном этапе развития общества.

В соответствии с этим к концу школьного обучения (может быть, с различной степенью глубины для восьмилетней и средней школы) учащиеся должны:

1) иметь сознательные, прочные и систематические знания по курсу математики в их взаимосвязи как внутри самой математики, так и в отношении ее с другими учебными предметами;

2) уметь организованно воспроизводить ведущие знания в определенной системе;

3) уметь применять имеющиеся знания в наиболее типичных ситуациях;

4) уметь вычислять с пониманием, точностью и быстротой;

5) владеть общими эвристическими приемами решения задач;

6) понимать логическую структуру курса математики в целом,

понимать сущность математических доказательств и знать основные методы доказательства;

7) уметь формулировать определения понятий, аксиомы и теоремы и оформлять их письменно с помощью символики;

8) использовать знания математических фактов, процессов, операций и соотношений для обнаружения возможных обобщений;

9) иметь сформированное на достаточном уровне диалектико-материалистическое мировоззрение; понимать и правильно оценивать роль математики в жизни современного общества, в науке, технике и народном хозяйстве;

10) уметь усматривать математические закономерности в окружающем мире, математизировать простейшие реальные ситуации;

11) владеть основными навыками рационального учебного труда, необходимыми для дальнейшего самостоятельного изучения математики, потребностью и способностью к самоконтролю;

12) проявлять любознательность, интерес к математике и ее приложениям;

13) проявлять различные умственные способности, в том числе способность к творчеству, вкус к исследованию;

14) обладать нравственными качествами (волей, критичностью, устойчивым интересом, аккуратностью и т. п.), необходимыми для успешного изучения математики.

Поэтому в ходе контроля и оценки знаний на любом этапе обучения наряду с конкретными целями следует иметь в виду соответствие этих целей общим целям обучения, воспитания и развития.

Существуют различные классификации целей контроля и оценки знаний (по типу учебной деятельности, по способам активизации этой деятельности, по содержанию обучения, по времени обучения и т. д.). Для учителя-практика имеет значение не классификация целей, а их реализация. Практически любая работа по оценке знаний имеет многоплановый характер. Она реализует одновременно целый комплекс конкретных целей обучения, воспитания и развития.

Таким образом, к эффективному контролю и оценке математических знаний предъявляются следующие требования:

контроль и оценка знаний должны быть не только количественными (объем усвоенных знаний), но и качественными (сознательность, глубина, прочность и активность усвоенных знаний);

контроль и оценка знаний должны учитывать состояние обученности, обучаемости и математического развития учащихся;

контроль и оценка знаний должны осуществляться так, чтобы выявлять тот или иной уровень этих компонентов, достижение которого запрограммировано на данном этапе обучения, в частности контроль и оценка знаний должны учитывать уровень активности использования усвоенных школьниками знаний;

контроль и оценка знаний должны проводиться на таком конкретном учебном материале, который является действительно важным с точки зрения общих целей математического образования; дифференцирующая сила каждого задания должна быть заранее определена учителем, а общая оценка состояния знаний и развития учащегося должна определяться успешным выполнением заданий, имеющих большую значимость по сравнению с остальными;

работа учителя по контролю и оценке знаний должна быть хорошо продуманной и подготовленной на каждом ее этапе; результаты этой работы должны быть проанализированы и использованы для совершенствования как процесса контроля и оценки знаний, так и процесса обучения математике в целом.

В процессе контроля и оценки знаний школьников можно выделить следующие основные этапы:

1) этап планирования контроля (оценки знаний);

2) определение и формулировка целей контроля и оценки знаний (специальных и конкретных);

3) определение форм и методов проведения оценки знаний (письменная контрольная работа, математический диктант, работа над текстом учебника, работа над серией задач, собеседование, зачет, экзамен и т. д.);

4) определение содержания работы по оценке знаний и установление соответствия содержания выбранным целям и форме оценки знаний, имеющемуся учебному времени, составу класса и т. д.;

5) обработка и анализ результатов работы по оценке знаний и их интерпретация (на основе сравнения их с нормами, на основе опыта работы учителя, сопоставления с ожидаемыми результатами и т. д.);

6) определение желательных изменений процесса обучения (методов обучения или контроля, техники проведения работы по оценке знаний, темпов изучения нового материала, повторения изученного и т. д.);

7) изменения в планировании работы по контролю и оценке знаний.

Перечень основных этапов работы по проведению контроля и оценки знаний начинается с этапа планирования, который на первый взгляд представляется само собой разумеющимся и имеющим место в практике работы учителя математики. Однако этот этап является не только весьма важным, но и достаточно сложным. Уже на этом этапе работы учитель должен выделить внутри каждой темы курса математики узловые понятия и положения, без прочного знания которых исключается всякая возможность усвоения последующего учебного материала или каких-либо его частей, т. е. такие понятия и положения, которые активно используются в дальнейшем. Кроме того, в школьном курсе математики содержится немало понятий, которые одновременно являются как средством, так и предметом изучения. Таковы, например, понятия

множества, функции, вектора. Все эти понятия можно назвать ведущими, а этапы их частичного и полного усвоения считать контрольными точками процесса обучения.

Следует иметь в виду, что таких контрольных точек в обучении может оказаться весьма много. Некоторые из них оцениваются как первостепенные, а другие как вспомогательные, или промежуточные. В зависимости от требований к полноте и глубине изучения этих понятий и положений на том или ином этапе и должны строиться соответствующие проверочные задания в планируемых контрольных точках.

Во многих случаях удачной по времени и содержанию постановкой контрольных заданий можно расширить или углубить изложение материала в учебных пособиях; побудить учащегося к размышлению над теми вопросами, которые недостаточно глубоко освещены в учебнике (и тем самым обеспечить более эффективное изучение программы в целом).

Этапу определения целей контроля и оценки знаний, чрезвычайно важному этапу этой работы, к сожалению, до сих пор не придается должного значения. Отчасти это можно объяснить тем, что наиболее распространенные (и наиболее важные, с точки зрения учителя) формы этой работы (самостоятельные и контрольные письменные работы и, конечно же, экзамены) проводятся по официальным текстам (или текстам, рекомендованным в методических пособиях). В силу этого учителя достаточным полагают просто успешное выполнение работы в целом, подразумевая, что авторы текстов работ реализовали в их содержании все необходимые цели. На наш взгляд, такое положение нельзя признать удовлетворительным. В самом деле, незнание конкретных целей самим учителем делает по существу невозможным качественный анализ результатов работы, а значит, и эффективное усовершенствование процесса обучения. Практика обучения математике показывает, что даже аналогичные результаты одной и той же работы трактуются различными учителями по-разному (не говоря уже о различии фактических оценок работ разными учителями).

Нередко в практике обучения математике общие результаты выполнения одной и той же работы определяются лишь соотношением числа решенных и нерешенных задач без учета их целевой значимости в общем содержании работы. А ведь всем известно, что по существу ни одна контрольная работа не состоит из задач, одинаковых по значимости (степени сложности и трудности, что само по себе, конечно, является правильным). В практике работы школы бывает и так, что существенные пробелы в знаниях учащихся часто не принимаются учителем во внимание, тогда как несущественные определяют не только саму оценку, но и отрицательно проявляются в методике работы самого учителя, которую он нередко перестраивает с учетом того, на что можно было бы не обращать внимания. Поэтому определение целей работы в целом и функций каждого из ее заданий представляется очень важным.

Следует также заметить, что многие учителя и даже методисты нередко просто не умеют это делать; опыт показал, что учителя легче всего выделяют конкретные цели, относящиеся к умениям и навыкам, труднее — к знаниям теоретического материала и почти никогда — к развитию и воспитанию. На этом этапе важно четко определить ведущие и второстепенные конкретные цели контроля и оценки знаний, ясно представить себе ожидаемые результаты и выработать конкретные критерии оценки, соответствующие возможным уровням выполнения заданий.

В ходе подготовки необходимо прежде всего ответить на следующие вопросы:

1) Что должен знать и уметь учащийся на данном этапе изучения данной темы?

2) Какими операциями, приемами, методами, умениями и навыками он должен владеть и на каком уровне?

3) Что он должен был запомнить на данном этапе изучения темы; в каком виде может быть выражено воспроизведение в памяти изученного?

4) Какие общие изменения в уровне математических знаний и развития учащихся можно ожидать; в какой форме это может выражаться и как их можно оценивать? и т. п.

В результате ясного и четкого ответа на подобные вопросы и определяются основные функции, которым должны удовлетворять задачи, составляющие содержание работы по оценке знаний (или по контролю над ходом их усвоения), и среди них выделяются ведущие и второстепенные. Так, например, готовя контрольную работу по теме «Тождества сокращенного умножения», необходимо четко представлять себе:

а) перечень тождеств, которые учащиеся должны знать;

б) в каких (по сложности) типичных ситуациях учащиеся должны уметь применять эти тождества;

в) каким образом можно отличить умение применять эти тождества формально от умения применять их творчески.

При этом важно отдавать себе полный отчет в том, в каких формах должен (и может) проявиться соответствующий опыт учащихся[1]; на каком уровне к данному моменту должен проявиться этот опыт: помнить наизусть эти тождества и уметь подставлять в формулу числовые значения; уметь выводить их и применять по образцу; уметь применять тождества в сходной ситуации; уметь обнаруживать возможность их применения (и успешно применять их) в новой ситуации (все это знания одного и того же, но проявляющиеся на различных уровнях усвоения).

Таким образом, при определении целей работы по контролю (или оценке знаний) целесообразно иметь в виду следующие требования:

---

[1] Будем понимать *под опытом* комплекс знаний, умений, навыков, которыми владеет школьник, и уровень его математического развития.

1) каждая характеристика целей работы по оценке знаний должна предусматривать проявление желаемого опыта учащихся и указывать на соответствующий тип учебной ситуации; ситуация эта должна быть такой, чтобы опыт учащихся мог проявиться на различных характерных для него уровнях;

2) при формулировке той или иной цели должно быть предусмотрено ее достижение на основе опыта самих учащихся (а не учителя);

3) цели следует формулировать так (по их качеству и их числу), чтобы учитель мог по результатам работы судить не только о состоянии опыта учащихся, но и об эффективности использованных им самим приемов и методов обучения, о желательном их изменении.

Прокомментируем каждое из этих положений дополнительно.

Первое означает, что, проверяя, например, умение учащихся решать уравнение, требующее предварительных тождественных преобразований и применения теоремы о равенстве нулю произведения двух выражений, нужно определить и тот тип задач, в которых это знание (и умение) может проявиться на различном возможном уровне. В частности, отбор типов задач может быть таким:

а) $(x-3)\,5=0$;
б) $(x-2)(x+5)=0$;
в) $x(x-1)-5(x-1)=0$;
г) $x^2-2x+3x^2-6=0$;
д) $x^2+4x+4=0$;
е) $x^2-5x+6=0$ и т. п.

Второе положение говорит, в частности, о том, что не следует требовать (и ожидать от учащихся) решения уравнения $x^2-5x+6=0$ по известной формуле (которая им неизвестна на данном этапе обучения) или требовать обоснования того факта, что множество $\{2; 3\}$ содержит все корни данного уравнения.

Кроме того, лучше сначала поставить эту задачу в формулировке *решить уравнение*, а не в формулировке *решить уравнение разложением многочлена, стоящего в его левой части, на множители*, так как в последнем случае сразу снижается значимость этой задачи для целей оценки знаний.

Определяя ту или иную специальную цель оценки знаний, следует иметь в виду, что ее достижение учащимися — процесс достаточно длительный и сложный. Поэтому при проведении контрольной работы полезно предусмотреть различные уровни достижения цели. Для этого в контрольные задания целесообразно включать задачи с несколькими, последовательно предлагаемыми заданиями (двумя-тремя), правильное выполнение каждого из которых фиксирует достижение соответствующей подцели данной цели.

Наконец, третье требование связано с тем, что если число специальных целей обучения (и контроля) не так уж велико, то число конкретных значительно больше. Поэтому при формулировке целей оценки знаний должно быть предусмотрено достаточное

число промежуточных целей, связывающих конкретное со специальным.

Следует иметь в виду и то, что излишняя конкретизация целей нежелательна, равно как и их излишняя общность. Так, например, цель «Знать формулировку аксиомы 1» выглядит излишне категорично. Успешное достижение ее учащимися по существу не говорит ни о чем (учащиеся могут просто заучить, воспроизвести формулировку аксиомы, не понимая ее смысла).

Цель типа «Обнаружить владение дедуктивным методом как приемом мышления» также почти бесполезна при постановке конкретного задания (соответствующий опыт учащегося не может быть охарактеризован по результатам решения одной конкретной задачи).

В связи с третьим положением хотелось бы отметить большую полезность (чрезвычайно редких сейчас в практике обучения) целей, направленных на оценку того или иного вопроса курса математики самим учащимся (его интереса, сложности, значимости и т. п.).

На третьем этапе работы по контролю и оценке знаний требуется выбрать те формы и средства контроля, которые обеспечили бы наиболее эффективную оценку знаний учащихся. Для каждой контрольной точки могут быть выбраны различные формы и средства контроля. Это может быть контрольная работа, практическая работа на местности, программированный контроль и т. п., в зависимости от характера учебного материала, значимости данной контрольной точки и имеющихся в распоряжении учителя средств контроля. Очень важно спланировать подобранные средства контроля так, чтобы их сочетание давало оптимальный эффект в данных условиях. Характер контролируемых знаний определяет в основном выбор форм и методов оценки знаний.

Менее употребительны (но не менее полезны) такие формы контроля и оценки знаний по математике, как анкетирование, собеседование, наблюдение. Имеющая сейчас место относительная непопулярность этих форм во многом объясняется тем, что в распоряжении учителя массовой школы пока еще нет удобных средств для фиксации результатов этой работы (специальных текстов, магнитофонов и т. п.).

Важным этапом работы по оценке знаний является определение ее содержания, которое облегчено в настоящее время наличием официальных (или близких к ним) готовых текстов письменных (и даже устных) проверочных работ, предоставляемых учителю методическими пособиями (и даже статьями в журнале «Математика в школе»). Такая помощь учителю могла бы быть, на наш взгляд, оправдана, если бы к этим текстам прилагался перечень целей работы в целом (или каждого задания в частности) и рекомендовался бы тот или иной критерий оценки ее возможных результатов.

По-видимому, вопрос о том, что предпочтительнее (проведение контрольных и самостоятельных работ по текстам, опубликован-

ным в официальных пособиях, или по текстам, составляемым самим учителем), не может быть решен однозначно.

В самом деле, если тексты контрольных работ составлены самим (и к тому же опытным) учителем, то в отличие от официально рекомендованных они:

а) более приспособлены к конкретным условиям обучения, более дифференцированны и содержательны;

б) легче адаптируются к любым локальным изменениям программы и учебников;

в) повышают методическое мастерство учителя, что, естественно, приводит к улучшению качества обучения;

г) дают учителю возможность для более всестороннего изучения и оценки деятельности каждого учащегося, предупреждения ошибок и ликвидации обнаружившихся пробелов в его знаниях.

С другой стороны, можно аргументировать и довод в пользу проведения контрольных работ по единым текстам. В настоящее время нередко бывает так, что учащиеся, окончившие разные школы и имеющие одну и ту же общую оценку знаний по математике, обладают знаниями курса математики слишком в широком диапазоне уровней сознательности, полноты и прочности. Это происходит прежде всего потому, что контроль и оценка знаний в настоящее время ведутся на недостаточно высоком уровне.

Результаты работы школьников пока еще в большинстве случаев оцениваются учителем-практиком на глазок, в соответствии со сложившейся личной точкой зрения учителя на объем и содержание желаемого изменения опыта учащихся.

Поэтому контроль и оценка знаний по одним и тем же для всех текстам, с более или менее единым критерием, способствуют унификации требований к уровню математических знаний школьников и в период перехода школы на новое содержание и методику обучения, пожалуй, оправданы.

Этапу обработки и анализу результатов контролирующих заданий в настоящее время также не уделяется достаточного внимания. Прежде всего, это происходит потому, что многие формы оценки (и сами контролирующие задания) не удовлетворяют требованиям целесообразности, обоснованности, надежности и объективности полученных результатов.

В самом деле, грамотному и эффективному анализу результатов работы способствует, прежде всего, четкость в постановке и реализации целей работы в целом и выявление контролирующих функций каждого задания в частности (в этом состоит требование ее целесообразности).

Эффективность оценки знаний и анализ результатов этой работы повышаются, если она обладает свойством обоснованности (уместности ее в данных условиях), важными компонентами которой являются, в частности, доступность, разносторонний ее характер, наличие достаточного учебного времени на ее выполнение и т. д.

Надежность и объективность оценки знаний (и контроля знаний в целом) во многом зависят от степени самостоятельности ее выполнения школьниками, а также от того, является ли эта работа достаточно исчерпывающей (проверяется ли состояние его знаний, умений, навыков, развития, отношение учащихся к предмету, различие в уровнях глубины, сознательности и прочности овладения школьниками программным материалом), является ли она сбалансированной (по целям, в их сочетании), проводится ли систематически (проверяется ли оперативно).

Интерпретируя результаты работы по оценке знаний, желательно:

а) сопоставить результаты работы каждого учащегося с результатами, полученными другими (в обученности и развитии, в знаниях и опыте, в полноте достижения поставленных целей и т. п.), с результатами его же работы в прошлом;

б) сопоставить результаты выполнения работы одним коллективом учащихся с результатами выполнения той же работы, проведенной в другом классе, школе;

в) сопоставить результаты работы, выполненной в данном классе, с нормой (средними результатами), учитывая вместе с тем то, что норма не является стандартным выражением желаемого опыта учащихся.

Наконец, этап выявления и реализации определенных изменений в методах обучения, темпе изучения, в технике самой работы по контролю и оценке знаний определяется результатами работы и конкретными условиями обучения математике. Этот этап почти всегда имеет место в практике работы учителя массовой школы и потому вряд ли нуждается в комментариях.

В качестве примера, иллюстрирующего реализацию упомянутых требований к проведению работы по оценке знаний учащихся, приведем одну из контрольных работ по алгебре в VII классе (в одном варианте), подготовленную сектором обучения математике НИИ школ МП РСФСР и проведенную в школах нескольких территорий республики в 1973/74 учебном году.

В специальном введении к работе, адресованном учителю математики, было отмечено, что предлагаемая контрольная работа обладает некоторыми особенностями. Было, в частности, указано на то, что, помимо проверки отдельных знаний, умений и навыков, работа рассчитана на проверку уровня математического развития учащихся, изучающих математику по новой программе. Так как число заданий и объем работы превышали возможности среднего ученика, предполагался особый порядок ее выполнения: сначала учащиеся знакомятся с работой в целом, затем приступают к выполнению тех заданий, которые им кажутся более простыми, стараясь выполнить при этом возможно большее число заданий. Порядок выполнения заданий определяли сами учащиеся. Было также указано, что данная работа рассчитана на один урок и что оценки за нее выставлять не обязательно.

Содержание и цели каждого из двух вариантов работы были аналогичны. Приведем содержание одного из вариантов работы и основных функций ее по заданиям.

Контрольная работа по алгебре

1. Является ли верной пропорция:

$$\text{а) } \frac{18}{3}=\frac{24}{4}; \quad \text{б) } \frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}; \quad \text{в) } \frac{0}{6}=\frac{0}{4}?$$

2. Решите уравнение: $x^3 - 9x = 0$.

3. Из данных неравенств выпишите верные:

а) $4 \leqslant 4$; б) $-\frac{11}{12} < -\frac{12}{13}$; в) $-4 \geqslant -6$; г) $1 \leqslant 4 \leqslant 4$.

4. Запишите множество решений неравенства и изобразите его на числовой прямой: а) $|x| \geqslant 2$; б) $|x| \geqslant -1$.

5. Постройте график функции: а) $y = 2x - 1$; б) $y = -|x|$. Укажите множество значений переменной, на котором функция: положительна; отрицательна; равна нулю.

6. Решите уравнение $(4x^2 - 12x + 9) - (9x^2 + 12x + 4) = 0$, представив его левую часть в виде произведения.

7. Какие из изображенных на рис. 60 кривые могут служить графиком какой-либо функции? (Поясните ответ.)

8. Постройте график уравнения $(y - 2x)(y + x) = 0$.

9. Даны множества:

$A = [0; 2[$ и $B =]0; 2]$.

Запишите числовой промежуток: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$.

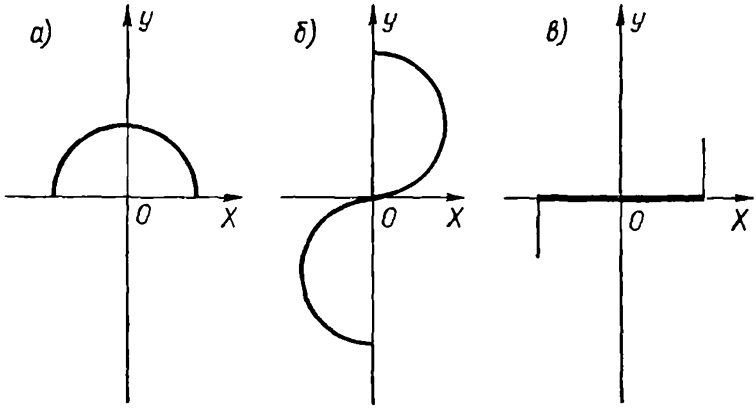


Рис. 60

10. Дана система линейных уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} y = x + c \\ dy = x + 2. \end{cases}$$

Не решая системы, определите, сколько решений она имеет при а) $c = 1, d = 1$; б) $c = 1, d = 2$; в) $c = 2, d = 1$; г) $c = 2, d = 2$. Поясните ответ.

В приложении для учителя были выделены следующие основные функции составляющих ее заданий.

Первым заданием предусматривалась проверка знания учащимися определения пропорции и умения установить, удовлетворяет ли данное числовое равенство этому определению, глубины усвоения этого понятия, так как приведенные в задании конкретные пропорции (кроме первой) заданы в нестандартной форме. Таким образом, проверялась сформированность таких компонентов математического развития, как логическое мышление (умение подвести понятие под его определение), способность применить известные знания в новой ситуации, гибкость и глубина мышления.

Вторым заданием — умение школьников проводить предварительные тождественные преобразования выражений (способом разложения на множители и с применением формулы разности квадратов двух выражений), знание свойства произведения выражений, равных нулю, умение решить уравнение указанным методом.

Третьим заданием — понимание смысла понятия «верное высказывание» (на примере числового неравенства), интуитивно правильное понимание смысла дизъюнкции, выраженной нестрогим неравенством, понимание смысла выражения, представленного двойным неравенством, умение сравнивать рациональные числа (в том числе заданные в нестандартной ситуации). Таким образом, и этим заданием наряду с уровнем знаний учащихся по определенной теме проверялись сформированность определенных компонентов их математического развития.

Четвертым заданием — понимание смысла знака модуля в записи числа и умение использовать эти знания для выявления множества чисел, удовлетворяющих заданному условию, умение изобразить данное множество чисел в виде промежутка на числовой оси (и тем самым способность к конкретизации).

Пятым заданием — умение строить графики функций, заданных формулой, и проводить (по графику) исследование, способность интерпретировать эти свойства по их проявлению на графике; одновременно предусматривалась проверка уровня сформированности элементов схематического (пространственного) мышления.

Шестым заданием — умение решить уравнение после предварительных, упрощающих его тождественных преобразований, умение распознать в данных выражениях известные учащимся виды многочленов (квадрат суммы или разности) и использовать это в ходе тождественных преобразований (непосредственное приведение подобных членов приводило к квадратному уравнению, решать

которое учащиеся не умели, и усложняло дальнейший путь решения уравнения), сформированность элементарных навыков тождественных преобразований.

Седьмым заданием — глубина и сознательность овладения учащимися понятием функции, умение соотнести известное им определение функции к ее графическому изображению, способность к интерпретации характеристического свойства функции на языке графика функции, умение обосновать сделанный учащимися выбор с помощью простейших рассуждений.

Восьмым заданием — понимание смысла выражения «график уравнения» и умение практически строить график линейной функции, заданной в ситуации уравнения.

Девятым заданием — понимание смысла применяемых символических обозначений, знание операций объединения и пересечения множеств, умение изобразить данные множества и результаты операций над ними на числовой прямой (или выполнить задание, опираясь на мысленное воображение), владение учащимися языком математической символики.

Десятым заданием — понимание смысла понятий системы уравнений, ее решения, знание и умение распознать (или интерпретировать) каждый возможный случай при решении таких систем уравнений, интуитивное понимание смысла конъюнкции высказываний (высказывательных форм), выраженной системой уравнений, владение элементами дедуктивного мышления.

Выборочный характер работы позволял выявить те знания, которые школьникам (по их собственному мнению) казались наиболее прочно усвоенными, область их интересов. Избыточность заданий, выполнение которых было ограничено во времени, давало возможность выявить средний темп работы и его отклонения в ту и другую сторону. Она не имела целью выработку критериев оценки знаний, и потому «вес» каждого ее задания не указывался.

Проведенный впоследствии выборочный анализ некоторых работ учащихся (оцененных учителем) показал существенное различие в подходах к оценке работы по баллам. Даже очевидное соображение о том, что школьник, выполнивший правильно шестое задание, может не выполнить второе задание (что ему можно простить ошибки, допущенные в ходе выполнения этого задания), имело место далеко не всегда. Значимость многих заданий (например, заданий 5а и 5б) во многих случаях считалась учителем одинаковой.

И хотя более тщательное продумывание учителями содержания данной работы могло бы повысить объективность ее общей оценки баллом, это не могло бы решить проблемы объективной оценки результатов учебной работы школьников, так как она является весьма сложной. В самом деле, в идеальном случае, чтобы оценка была объективной, помимо специальных знаний, учитель математики должен обладать многими качествами, присущими эксперту

креативностью (способностью творчески подходить к решению любой проблемы), эвристичностью (способностью обнаруживать неочевидное), интуицией, предикаторностью (способностью предсказывать и предчувствовать будущее состояние исследуемого объекта), независимостью (способностью противопоставлять предубеждениям и мнениям других собственное мнение), всесторонностью (способностью видеть проблему с различных точек зрения) и т. д.[1].

Ясно, что формирование этих качеств личности учителя должно быть специальным предметом его профессиональной подготовки, а их совершенствование — предметом пристального внимания методистов.

Сектором обучения математике совместно с лабораторией квалиметрии МГПИ им. В. И. Ленина в 1972/73 учебном году были проведены контрольные работы в V и VI классах с последующей обработкой их результатов на ЭВМ.

Так, в марте 1973 г. в 52 пятых классах школ РСФСР была предложена контрольная работа следующего содержания (в двух идентичных вариантах):

1. Сравните значение $2\frac{9}{11} + 5\frac{10}{11} - 4\frac{2}{11}$ с числом $4\frac{9}{22}$.

2. Сумма трех чисел равна (—6,3). Одно число больше другого на 1,05, а третье — на 12,6 меньше суммы первых двух. Найдите эти числа.

3. Начертите прямоугольный треугольник с катетами AC и BC ($|AC| = 3$ *см*, $|BC| = 2$ *см*). Через точку C и середину гипотенузы O проведите прямую. Установите, является ли прямая OC осью симметрии точек A и B. Поясните ответ.

Для фиксации результатов работы учителям математики была предложена таблица, в которой те отмечали (знаком «+») утвердительный ответ на тот или иной вопрос из имеющейся у них схемы анализа работы (оставляя пустым соответствующее место в таблице в случае отрицательного ответа). Таблица заполнялась на каждого учащегося, выполнявшего работу. Для учителя были указаны основные контролирующие функции каждой задачи и дана подробная инструкция о порядке проведения данной контрольной работы и заполнения таблицы по ее результатам.

Анализ результатов обработки, данных на ЭВМ, выявил, что в работе принимали участие 1747 учащихся пятых классов, среди которых (по мнению самих учителей) оказалось 42,2% хорошо и отлично успевающих учащихся, 40,7% — успевающих удовлетворительно и 17,1% — слабоуспевающих.

Общие результаты выполнения каждого задания выразились следующими данными:

---

[1] См.: Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г. Экспертные оценки. М., 1973, с. 103.

Номера задач / Выполнение	1	2	3
Приступили к решению задачи	95,3%	48,9%	15,6%
Верно решили задачу (от числа приступивших к решению)	66,1%	18,6%	30,1%

Уже эти общие данные показали, что объем работы был явно завышенным для той нормы времени (45 *мин*), которая отводилась на ее выполнение.

Помимо этих общих показателей, анализ результатов обработки, данных на ЭВМ, позволил дать весьма обстоятельную качественную характеристику состояния знаний учащихся по материалу, отраженному в содержании работы, а также получить определенные данные относительно их математического развития. Например, было установлено, что 61% учащихся, решавших первую задачу, проводили сравнение дробей стандартным способом (приведением дробей к общему знаменателю) и лишь 9% применили нестандартный способ (сравнение дробной части числа с половиной единицы). В ходе решения третьей задачи 42% учащихся использовали для обоснования своего ответа ссылку на известное им свойство срединного перпендикуляра и только около 10% использовали при обосновании определение симметричных фигур. Эти результаты, в частности, свидетельствовали о том, что идеи и методы, заложенные в новых программах, еще не были (в то время) в достаточной мере внедрены в практику.

По коэффициенту корреляции событий, вычисленному на ЭВМ, удалось установить степень зависимости одних результатов выполнения работы от других. Например, была показана зависимость между слабой успеваемостью и неумением решить первую задачу (стандартного характера), зависимость наличия ошибок в выделении целого числа из неправильной дроби от результатов работы по сравнению дробей. Так, те учащиеся, которые правильно сравнили дроби, не сделали ошибок в выделении целого числа из неправильной дроби.

Вычисленные с помощью ЭВМ частоты совмещения различных пар результатов (предусмотренных схемой анализа) дали возможность установить число приступивших к решению каждой задачи (и решивших ее верно) по каждой из трех категорий учащихся (хорошо, средне- и слабоуспевающих). Значения частоты совмещения пар в других случаях дали возможность установить, например, что 10,5% учащихся (от числа всех приступивших к решению второй задачи) ошиблись одновременно в действиях над рациональными числами и в решении уравнения. Из числа учащихся,

верно решивших первую задачу, решили верно вторую 11,6% и третью 21,4% (что показало бо́льшую трудность второй задачи, по сравнению с третьей). 58% учащихся, выполнявших сравнение дробей стандартным способом, допустили вычислительные ошибки; из числа учащихся, применивших нестандартный способ сравнения дробей, ошиблись только 7% (первая часть решения этой задачи проходила одинаково; примерно равным оказался и процент вычислительных ошибок).

При решении третьей задачи из числа тех учащихся, которые пытались обосновать ответ ссылкой на конкретное свойство фигур, 50,3% не сумели сделать это правильно; обращение к более общему свойству оказалось бесплодным лишь для 12% учащихся из тех, кто выбрал этот способ обоснования ответа.

Приведенных примеров, на наш взгляд, достаточно, чтобы утверждать, что обработка на ЭВМ результатов контрольных работ может дать весьма многостороннюю и достаточно полную количественную и качественную характеристику состояния математических знаний и развития школьников. Заметим, что первый опыт привлечения ЭВМ к обработке результатов контрольных работ показал необходимость совершенствования как содержания работы, так и содержание вопросов к ее анализу (и указал, в каком направлении это следует делать).

В настоящее время широкое признание получили контрольные работы, которые близки по форме к текстовым. Такая работа, проводимая, как правило, в качестве итоговой (или в качестве диагностической), состоит из обычных задач и упражнений, число которых явно избыточно для их выполнения всеми в указанный срок (об этом знают и сами учащиеся). Вместе с тем составляющие ее задания не требуют длинных выкладок (или рассуждений), не предполагается и долгий поиск способа решения той или иной задачи.

Учащемуся предлагается решать задачи по своему выбору и столько, сколько он сумеет. Если текст работы изложен на отдельном листке (и имеется у каждого ученика), то решение некоторых задач выполняется школьником непосредственно по тексту; решение остальных задач он выполняет на дополнительном листке.

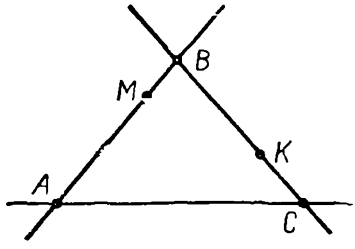


Рис. 61

Вот пример одной из таких работ (приводим только один вариант) по курсу геометрии VI класса, составленной сектором обучения математике НИИ школ МП РСФСР и предложенной в седьмых классах в начале учебного года.

1. Рассмотрите рис. 61. Вставьте пропущенные знаки ($\in$, $\notin$, $\subset$ или $\not\subset$) так, чтобы получить верные высказывания: а) K ... (AB);

Рис. 62

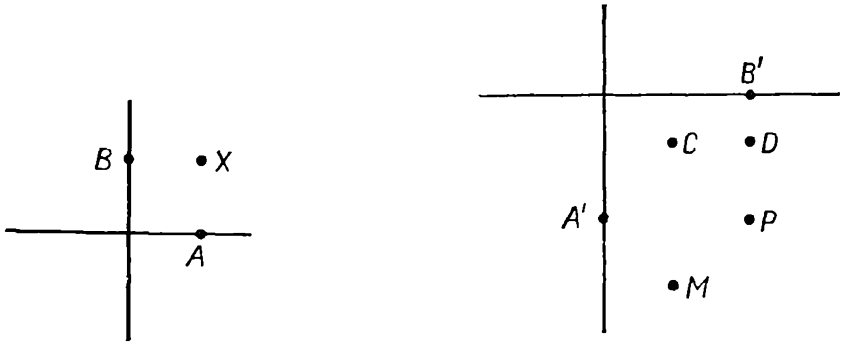


Рис. 63

Рис. 64

б) $[BK] \ldots [KC]$; в) $M \ldots [AM]$; г) $[BM) \ldots [AB]$; д) $[BM) \ldots$ $\ldots [MA)$.

2. Вставьте пропущенные знаки ($\cup$ или $\cap$) так, чтобы получить верные высказывания (рис. 62): а) $[MK) \ldots [NM) = [ON)$; б) $[MK] \ldots [ON] = [ON]$; в) $[OK) \ldots [NO) = (MK)$; г) $[NK) \ldots$ $\ldots [OM) = \varnothing$.

3. $\Phi_1 \cong \Phi_2$ (рис. 63), A' и B' — образы точек A и B соответственно. Какая из точек M, P, C и D является образом точки X (воспользуйтесь циркулем)?

4. Две из фигур, изображенных на рис. 64, центрально-симметричны. Какие?

5. Заштрихованная на рис. 65 фигура — подмножество круга диаметра AB. С помощью циркуля и линейки найдите центр и постройте фигуру, симметричную данной относительно оси l.

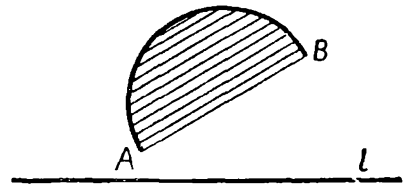


Рис. 65

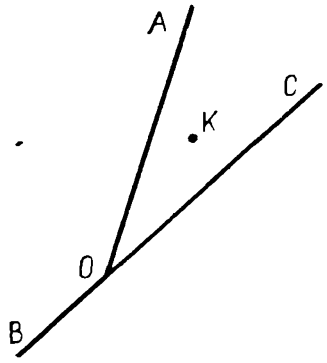


Рис. 66

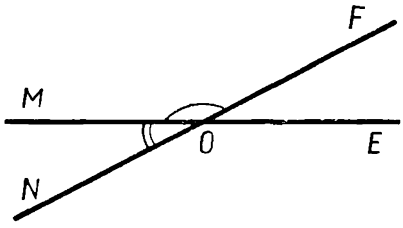


Рис. 67

6. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, конгруэнтны.

7. Из названных ниже фигур две отображаются на себя при некотором параллельном переносе. Какие именно: а) круг; б) параллелограмм; в) полуплоскость; г) открытая полуплоскость?

8. P, D, K — середины сторон треугольника ABC. Периметр треугольника PDK—10 *см*. Найдите периметр треугольника ABC.

9. Конгруэнтны ли фигуры Φ_1 и Φ_2, если известно, что Φ_1 состоит из трех, а Φ_2 — из двух различных точек?

Приведем еще один пример такой работы по математике, подготовленной сектором обучения математике НИИ школ МП РСФСР в качестве итоговой контрольной работы в четвертых классах.

1. Запишите законы умножения в виде равенств с переменными.

2. Найдите значение выражения $5{,}01 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 5{,}01$.

3. Нужно нарезать 60 красных и 90 синих ленточек — все одинаковой длины. Какой длины получится каждая ленточка, если синей ленты будет израсходовано на 15 *м* больше, чем красной? (Решите задачу без объяснений.)

4. Что значит число c разделить на число k?

5. Равенство $46{,}8 \cdot m = 56{,}16$ верно при некотором значении m. Найдите значение выражения $56{,}16 : m$ при этом же значении m.

6. Разность произведений неизвестного числа на 10,3 и 0,3 в десять раз больше 37,9. Найдите это число.

7. При каких натуральных значениях y верно неравенство $6{,}4 - y > 3{,}1$?

8. Запишите множество углов с вершиной в точке O, которым принадлежит точка K, и отметьте эти углы дугами на данном рисунке (рис. 66).

9. Как называются друг относительно друга два угла, отмеченные на рис. 67 (острый MON и тупой MOF)?

10. Заполните по строчкам пустые клетки в таблице, если a и b — стороны, P — периметр, S — площадь прямоугольника.

№ п/п	a	b	P	S
1	20	h		
2	10			8,6
3	10			20

11. Выразите 4 $м^2$ 8 $дм^2$ в квадратных метрах.

12. Найдите корень уравнения $1{,}5 - 0{,}3 : x = 0{,}3$.

Опыт показал, что такие формы контроля знаний и развития весьма эффективны.

В ходе контроля и оценки знаний школьников должны учитываться и результаты, характеризующие их математическое развитие. Так, например, школьник, незнакомый с соответствующим свойством умножения и деления чисел, но понимающий, что $(127 \times \times 37) : 37) \cdot 2$ есть числовое выражение, эквивалентное выражению $127 \cdot 2$, и предпочитающий для проведения вычислений последнее, обладает более высоким уровнем математического развития, чем школьник, вычисляющий значение первого и второго выражений поочередно (в данном случае — более высокий уровень развития интуитивного мышления).

Учащиеся, понимающие, что задача об определении стоимости 3 карандашей по 2 копейки за штуку и задача о покупке 4 кусков мыла по 25 копеек за штуку — это, по существу, одна и та же задача, обладают достаточно высоким уровнем способности к обобщению. Еще более высокий уровень обобщения может быть засвидетельствован у школьника, который будет считать той же самой задачей, что и две приведенные, задачу об определении пути, пройденного пешеходом, который в течение 3 *ч* шел со средней скоростью 4 *км/ч*.

Таким образом, существуют необходимость и возможность оценивать не только знания, но и развитие учащихся, причем на различных уровнях их сформированности, в частности следующих:

а) распознавание частного случая некоего общего положения;

б) словесное описание некоторого положения;

в) описание того же положения с помощью символики;

г) использование некоторого общего положения в конкретном случае (по образцу, в сходной и новой ситуациях);

д) использование некоторого положения для выявления новых понятий или положений, с помощью некоторой последовательности мыслительных операций и т. д.

Овладение приемами и методами, с помощью которых приобретаются математические знания, столь же важно, как и сами знания, не говоря уже о том, что владение тем или иным методом стимулирует развитие мышления и может привести к расширению знаний.

Однако до сих пор учителя математики конкретно не ориентированы на необходимость учитывать развитие школьников, полученное ими в ходе изучения программного материала. Все контрольные работы, проводимые органами народного образования или рекомендованные в пособиях, проверяют лишь уровень сформированности тех или иных понятий или уровень овладения операционными навыками. Уровень математического развития школьников на каждом этапе обучения по существу не проверяется и не учитывается при общей оценке качества обучения, что явно неправомерно[1].

Действующая сейчас программа создает все предпосылки для целенаправленного математического развития учащихся (которое пока еще в практике обучения планомерно не осуществляется). Опыт показывает, что само обучение сейчас положительно влияет на развитие математического мышления школьников и часто даже приводит к результатам, неожиданным для самого учителя.

Совершенно очевидно, что проблема оценки уровня математического развития школьников в целом (и установления уровня сформированности его составляющих) представляется чрезвычайно важной.

Начало исследованиям по определению уровня развития мышления школьников при обучении математике по новым программам было положено сектором математики НИИ школ, когда на новую программу по математике перешли шестые классы.

На первом этапе исследования была поставлена весьма локальная цель: установить, насколько обучение математике на новом содержании способствует развитию математического мышления школьников в целом. Одновременно с этим сектором обучения математике была предпринята попытка разработать систему учебных заданий нестандартного характера (содержание которых формально не выходило бы за рамки программы), которые могли бы охарактеризовать уровень математического развития школьников, хотя бы по его основным компонентам.

В марте — апреле 1973 г., а затем в то же время 1974 г. в Башкирской АССР и в Пензенской области были проведены срезовые работы, основу которых составляла специально разработанная система задач. Каждая из задач была построена на материале новой программы и наряду с первичными обучающими функциями в неявном для школьника виде несла функции контроля над математическим развитием.

На этом этапе исследования была поставлена цель проверить владение школьниками следующими умениями, входящими в состав математического развития:

1) умение сконструировать математическую модель простей-

---

[1] См.: Нешков К. И., Семушин А. Д. Функции задач в обучении. — «Математика в школе», 1971, № 3, с. 7.

ших ситуаций, умение интерпретировать результаты работы над данной математической моделью;

2) умение проводить простейшее исследование данной ситуации (относящееся как к процессу решения задачи, так и к условиям и целям ее постановки);

3) умение различать основные виды математических предложений (определения, аксиомы и теоремы), умение и потребность к обоснованию сделанных утверждений, т. е. элементарные навыки логического мышления;

4) умение применять имеющиеся знания в новой ситуации (при нестандартной для учащихся форме вопроса, необычной формулировке задания и т. п.);

5) умение использовать имеющиеся знания для получения новых знаний, способность к накоплению знаний и опыта;

6) умение сочетать индивидуальный и дедуктивный характер деятельности в процессе овладения новыми знаниями.

Для того чтобы иметь возможность конкретно представить характер задач и те требования, которые при этом предъявлялись к учащимся, приведем несколько примеров задач с последующей краткой характеристикой их контролирующих функций и результатов выполнения учащимися.

З а д а ч а 1 а. Начертите угол и обозначьте его вершину буквой A. На одной стороне угла отметьте точки B, C, D, E, а на другой — точки X, Y, Z. Установите с помощью стрелок такое соответствие (сделайте два рисунка) между множеством точек (включая точку A), отмеченных на одной стороне, и множеством точек, отмеченных на другой стороне, чтобы оно: а) являлось отображением и б) не являлось отображением.

Задача позволяла выяснить умение конструировать модель данной математической ситуации на основе усвоенного по учебнику понятия отображения. Оно отличалось от упражнений в учебнике тем, что последние требовали установить по модели (стрелочной схеме), является ли уже заданное соответствие отображением. Решая эту задачу, школьники должны были проявить умение строить модели двух видов: одну, чтобы данный факт имел место, и другую, чтобы он не имел места.

Решение задачи могло выглядеть следующим образом: $A \to A$, $B \to X$, $C \to Z$, $D \to Y$, $E \to Z$. Соответствие является отображением, каждому элементу одного множества поставлен в соответствие только один элемент другого множества (рис. 68). Соответствие не является отображением, так как элементу B поставлено в соот-

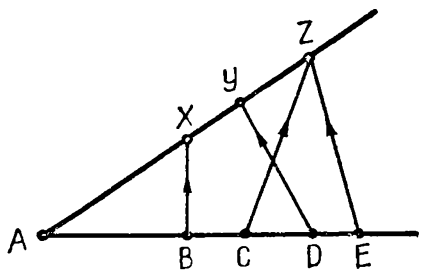


Рис. 68

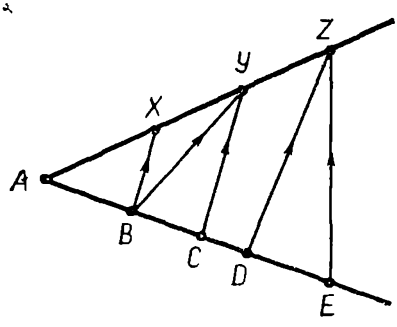


Рис. 69

ветствие два элемента другого множества (рис. 69).

Выполняя это задание, учащиеся (их было 390 человек) не только показали, что понятия соответствия и отображения различаются ими недостаточно четко, но и обнаружили слабое умение строить модель данной ситуации. Правильно ответили на вопрос задачи только 70% учащихся, 22% не сумели задать соответствие, которое не является отображением.

Задача 1 б. Как можно графически (на рисунке) изобразить замену отношения дробных чисел $^1/_4 : {}^1/_2 : {}^3/_4$ отношением целых чисел?

Этой задачей проверялось умение графически (геометрически) интерпретировать данную ситуацию. Задание выполняли 76 человек. Умение осуществить требуемую интерпретацию (на отрезках) обнаружили 50% учащихся. Только 4 человека свою интерпретацию связали с квадратом; другие геометрические фигуры учащимися не использовались. Отметим, что 15 человек пытались интерпретировать данную модель с помощью графика функции $y = kx + b$, что свидетельствует, на наш взгляд, о непонимании ими существа вопроса.

Задача 1 в. Укажите на числовой прямой примерное положение точек, соответствующих числам x^2, x^3, $^1/_x$, используя рис. 70.

Эта задача несла в себе немало конкретных обучающих функций: 1) умение устанавливать знаки квадрата, куба числа, по заданному его знаку, знак числа, обратного данному, при условии, что знак самого числа известен; 2) умение сравнивать модули квадрата, куба числа и числа, обратного данному, с модулем самого числа и единицей; 3) умение использовать числовую ось для обозначения и сравнения чисел и т. д. Вместе с тем задачей проверялась способность учащихся к абстрактному мышлению, выявлялась потребность мыслить конкретно (можно было ответить на вопрос задания, устанавливая знаки и оценивая модули заданного вида чисел, не прибегая к конкретным примерам, а можно было

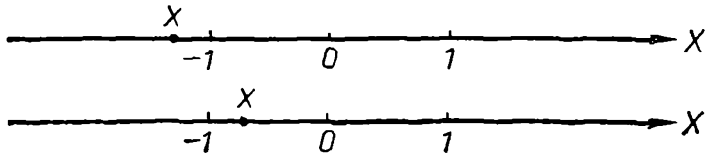


Рис. 70

подтверждать сделанную сначала догадку конкретными примерами значений указанных переменных и, наконец, устанавливать знаки чисел и оценивать их модули только с помощью конкретных значений переменной).

Предполагалось, что наиболее успешное решение задачи будет осуществлено сразу нанесением на числовую ось соответствующих пометок, после устно проводимых рассуждений.

Например, в одном случае рассуждение могло быть следующим: число x (судя по месту его на числовой прямой) — отрицательная дробь, модуль которой меньше 1, квадрат числа будет положительной дробью, с модулем, меньшим 1, и потому его место в промежутке $]0, 1[$, куб числа отрицателен, а модуль куба числа x находится в том же промежутке; число $\frac{1}{x}$, имея отрицательный знак, имеет модуль, больший единицы (точка на числовой прямой находится где-то в промежутке $]-\infty, -1[$).

Именно таким было рассуждение одного из испытуемых, успешно справившегося с этим заданием, в ходе последующего собеседования.

Результаты выполнения этого задания 190 учащимися были такими: верно изобразили числа, применяя способ решения, аналогичный указанному, 26 человек (13%); верно выполнили задание, обращаясь к конкретным значениям переменной, 19 человек (10%). Всего верно выполнили задание 23% учащихся.

Совершенно не справились с заданием 12%, остальные допустили в ходе его выполнения ошибки: при определении знака числа — 32 человека (16%), при сравнении модулей чисел заданного вида с числом x или числом 1 — 98 человек (49%).

Результаты решения этой задачи не назовешь успешными, хотя задания, близкие к данному, учащимися ранее выполнялись (они имеются в тексте учебников математики для V класса и алгебры VI класса).

Одной из причин является, на наш взгляд, комплексный характер этого задания, отличающий его от аналогичных заданий «Найти положение на числовой прямой чисел a или $2a$, если положение числа a задано».

Интересно отметить, что бóльшая часть учащихся, успешно выполнивших задание, решала эту задачу сразу в общем виде.

З а д а ч а 2 а. Каким может быть условие следующей задачи, чтобы можно было доказать параллельность прямых MK и NP (рис. 71)?

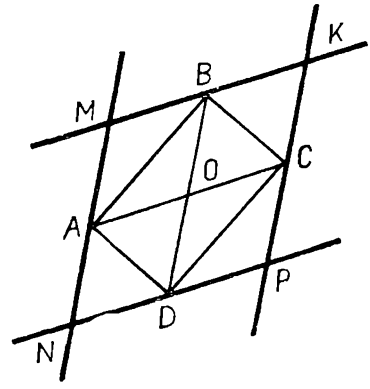


Рис. 71

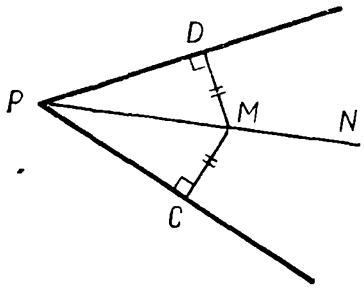


Рис. 72

Дано: . . . . . .

Доказать: $(MK) \parallel (NP)$.

Задачей 2а проверялось умение учащихся решать задачи экстраполяционного типа, умение создать условия, при которых данный факт обрел бы право на существование. Параллельно с этим заданием было предложено задание, обратное данному, — также задание экстраполяционного типа.

З а д а ч а 2 б. Какие утверждения можно доказать, имея следующие данные: $M \in [PN]$, $[MC] \cong [MD]$, $\widehat{MCP} = \widehat{MDP} = 90°$ (рис. 72)?

С помощью этой задачи проверялось умение выводить из данных фактов возможные их следствия, умение получить верный результат на основе имеющихся условий. Одновременно с этим проверялось понимание школьниками структуры математического предложения, называемого теоремой (в задаче 2а надо было по заключению сформулировать условие теоремы, а в задаче 2б из данного условия вывести следствие, сделав его заключением).

С задачей 2б учащиеся справились лучше, чем с задачей 2а. Так, из 131 учащегося, выполнявшего это задание, правильное заключение записали 100 человек (76%). Задача 2а вызвала значительно бóльшие трудности. Из 125 учащихся правильно записали возможное условие только 39 учеников, т. е. 31%.

З а д а ч а 2 в. Две стороны треугольника имеют длину 5,2 *см* и 2,4 *см*. Длина третьей стороны выражается натуральным числом сантиметров. Найдите множество значений длины третьей стороны.

Решение задачи предполагало выяснить умение учащихся провести простейшее исследование на основе установления необходимых связей алгебраических знаний с геометрическими. Предполагалось, что при решении данной задачи учащиеся используют свойство: если три различные точки не лежат на одной прямой, то каждое из трех расстояний между двумя точками, взятыми попарно, меньше суммы и больше разности двух других.

Пусть x — длина третьей стороны треугольника, тогда $2{,}8 < x < 7{,}6$, но так как $x \in N$, то $X = \{3; 4; 5; 6; 7\}$.

Здесь для установления уровней в умении начать и завершить исследование мог быть использован выбор пути решения данной задачи по одному из следующих трех направлений:

1) подбор значений x; в качестве проверки правильности своего решения учащиеся могли бы всякий раз строить треугольник по трем сторонам (возможность построения рассматривалась бы ими как доказательство верности выбора) — правильно, но не рационально;

2) использование необходимого, но недостаточного условия: во всяком треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон; $x < 7{,}6$, и тогда множество $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, являясь решением неравенства $x < 7{,}6$, не удовлетворяет условию задачи — рационально, но неправильно;

3) использование строгого двойного неравенства $2{,}8 < x < 7{,}6$ с пониманием того, почему неравенство $2{,}8 < x < 7{,}6$ строгое (вершины треугольника не лежат на одной прямой), — правильно и рационально.

Выполняли задание 60 школьников. Результаты решения показали, что обоснованное решение этой задачи сумели провести 12 учащихся.

З а д а ч а 2 г. Найдите значение выражения $\frac{81 \cdot 27^3}{3^8}$.

В явной форме эта задача несла в себе обучающие функции (умение изобразить числа в виде степени с одним основанием; знание правил действий над степенями чисел и умение их применять в комплексе). В неявном виде задачей проверялась настроенность учащихся на рационализацию решения задачи и понимание полезности предварительных тождественных преобразований для облегчения требуемых вычислений. Предполагалось, что школьники в оптимальном случае будут решать эту задачу следующим образом:

а) $\frac{81 \cdot 27^3}{3^8} = \frac{3^4 \cdot (3^3)^3}{3^8} = \frac{3^4 \cdot 3^9}{3^8} = \frac{3^4 \cdot 3}{1} = 3^5 = 243;$

б) $\frac{81 \cdot 27^3}{3^8} = \frac{81 \cdot 27^3}{81 \cdot 81} = \frac{27^3}{27 \cdot 3} = \frac{27^2}{3} = \frac{3^6}{3} = 3^5 = 243$

или другими аналогичными способами.

Из 221 учащегося верно и рационально решили задачу 188 (85%), 2% учащихся верно решили задачу без предварительных упрощений. Совсем не решили задачу 4%. Ошиблись в действиях над степенями 3%, а в сокращении дроби — 4% учащихся.

Результаты показали, что стремление учащихся выполнить задание наиболее рационально оказалось достаточно большим. Оказалось также, что рациональный способ выполнения задания предостерегает от возможных ошибок.

З а д а ч а 3 а. Сформулируйте по два математических предложения, относящихся соответственно к известным определениям, аксиомам, теоремам курса геометрии. Поясните решение.

Целью постановки этой задачи была проверка способностей школьников подвергнуть анализу математическое предложение и, вычленив характерные свойства, присущие определению, аксиоме или теореме, установить его принадлежность к тому или иному виду предложений. Понятно, что соответствующее умение является одним из показателей понимания логической структуры курса математики, без которого эффективное усвоение его (в особенности курса геометрии) попросту невозможно.

Задание выполняли 92 школьника, из них в целом правильно ответили на все вопросы задачи 36% учащихся (около 25% вообще не приступили к решению). Около 50% верно привели предложения, являющиеся теоремами, однако лишь около одной трети из них сумели обосновать свой выбор, указав на характерные признаки теоремы.

Почти никто из учащихся, верно решивших задачу в целом, не смог привести обоснований относительно проведенного ими выбора аксиом и определений. Некоторые учащиеся, пытаясь это сделать, отметили, что существенным признаком определения является наличие в его формулировке слова «называется» (называемый). Результаты, таким образом, показали, что учащиеся VI класса еще не обладают в достаточной мере логической культурой, даже в указанном плане (что, вообще говоря, не явилось для нас неожиданным).

З а д а ч а 3 б. Будет ли четырехугольник параллелограммом, если в нем две противоположные стороны параллельны, а две другие стороны конгруэнтны?

Задача предназначалась для проверки умения доказывать ложность того или иного утверждения приведением опровергающего примера. Достаточно было привести пример равнобедренной трапеции, которая, удовлетворяя условию задачи, не является параллелограммом.

Результаты показали, что все учащиеся (их было 91 человек) не понимают, совокупность каких признаков может определять параллелограмм; правильных решений не оказалось. Примерно половина учащихся утверждала, что четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи, непременно является параллелограммом. При этом приводились и неверные обоснования: одни утверждали, что из конгруэнтности противоположных сторон четырехугольника непременно следует их параллельность (15 человек); другие считали, что отрезки, заключенные между параллельными прямыми, конгруэнтны (3 человека). Задача же намеренно была сформулирована так, чтобы ответ на ее вопрос был неоднозначным: удовлетворяющий условию задачи четырехугольник может быть параллелограммом, а может и не быть (например, равнобедренная трапеция). Предполагалось, что будет иметь место хотя бы частичное ее решение (отрицательный ответ), но и этого не получилось.

З а д а ч а 3 в. Переменная y прямо пропорциональна переменной x, а переменная z обратно пропорциональна переменной x. Связаны ли прямой или обратной пропорциональностью переменные y и z?

Этой задачей проверялось умение подводить под известное определение данный математический объект; умение, используя символику, перейти к более простой формулировке условий задачи; понимание необходимости обосновывать сделанный вывод (утверждение).

Предполагалось, что учащиеся приведут следующее решение: пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; по условию $y = kx$ и $z = \frac{l}{x}$ или $\frac{y}{x} = k$ и $z \cdot x = l$,

тогда: а) $\frac{y}{z} = \frac{kx \cdot x}{l} = \frac{k}{l} x^2$ (нет); б) $yz = kx \cdot \frac{l}{x} = kl = m$

(да, по определению обратной пропорциональности переменных).

Из 197 школьников верно (с полным обоснованием) решили задачу 22 человека (11%), сумели правильно ответить на вопрос задачи, но не привели обоснования 123 человека (62%), только сформулировали (или записали в общем виде соответствующие требования для x и y, x и z 39 человек (20%). Значительная часть учащихся усвоила соответствующий материал формально, в силу чего многие просто угадали верный ответ. 27% учащихся по существу оказались беспомощными в этой ситуации или действовали на основе следующей сомнительной цепочки умозаключений:

y прямо пропорционален x
x обратно пропорционален z
---
y обратно пропорционален z.

В ходе собеседования было установлено, что все учащиеся знали наизусть определение прямой и обратной пропорциональности. Результаты, по-видимому, объясняются тем, что задач, формирующих неформальное усвоение этого вопроса, в учебном пособии не оказалось (большинство из задач имело характер прямой связи с определением какой-либо одной из данных двух пропорциональностей).

З а д а ч а 4 а. Можно ли назвать окружность выпуклой фигурой?

Задачей проверялось умение учащихся соотнести некоторый объект к соответствующему классу объектов (в частности, конкретную фигуру к классу выпуклых фигур) на основе определения понятия (выпуклой плоской фигуры). При этом было интересно, сумеют ли учащиеся решить эту задачу, преодолев привычное «житейское» представление о выпуклости фигур, и соотнести окружность к невыпуклым плоским фигурам, т. е. сумеют ли проявить гибкость мышления. В результате оказалось, что из 104 школьников, выполнявших это задание, соотнесли окружность к невыпуклым плоским фигурам только 38 человек (31%), остальные не смогли воспользоваться известным им определением.

З а д а ч а 4 б. Укажите несколько способов построения несовпадающих параллельных прямых. Объясните, почему вы считаете, что построенные этими способами прямые параллельны.

Задача была направлена на выявление у учащихся умения применять имеющиеся теоретические знания на практике, в частности

к обоснованию геометрических построений. Предполагалось, что учащиеся могут привести примерно такие ответы.

Прямые окажутся параллельными, если мы их построим:
а) центрально-симметричными относительно какой-либо точки;
б) перпендикулярно одной прямой;
в) пересекающими третью прямую под конгруэнтными соответственными углами;
г) пересекающими третью прямую под конгруэнтными накрест лежащими углами.

Были предусмотрены возможности проявления учащимися и более высокого уровня мышления. Например, могло быть предложено решение, в котором был бы построен выпуклый четырехугольник с конгруэнтными противоположными сторонами, и доказано, что, продолжая противоположные стороны, мы получим параллельные прямые или была бы построена средняя линия треугольника с указанием на то, что прямая (которой она принадлежит) и противоположная ей сторона треугольника (дополненная до прямой) параллельны.

Из 59 учащихся, выполнявших это задание, ни один не привел четырех способов построения параллельных прямых. Указали на три способа построения параллельных прямых 27% учащихся, на два способа — 35%. В остальных работах не наблюдалось осознанного применения теоретических положений к обоснованиям построений. Более или менее оригинальных способов построений параллельных прямых учащиеся не привели.

З а д а ч а 5 а. 1) Прочитать внимательно п. 18 учебника геометрии для VI класса (до слов «Если фигура Φ отображается ...»).

2) Записать коротко то главное, что следует запомнить, изучая этот текст.

3) Какие точки (из изображенных на рис. 73) симметричны друг другу относительно прямой l? Ответ обосновать.

A . . . (A'), так как . . .
B . . . (B'), так как . . .
C . . . (C'), так как . . .
D . . . (D'), так как . . .

4) Окончите следующее предложение: «Точки ... и ... называются симметричными относительно прямой l, если ...».

Задача была направлена на выявление следующих умений школьников:

а) выделить существенное в прочитанном (даже знакомом) математическом тексте;

б) установить существенные признаки известного понятия (симметричных точек);

в) на основе существенных признаков понятия (симметричных точек) установить принадлежность объекта (данных точек) этому понятию;

г) умение самостоятельно сформулировать новое определение известного понятия (симметричных точек).

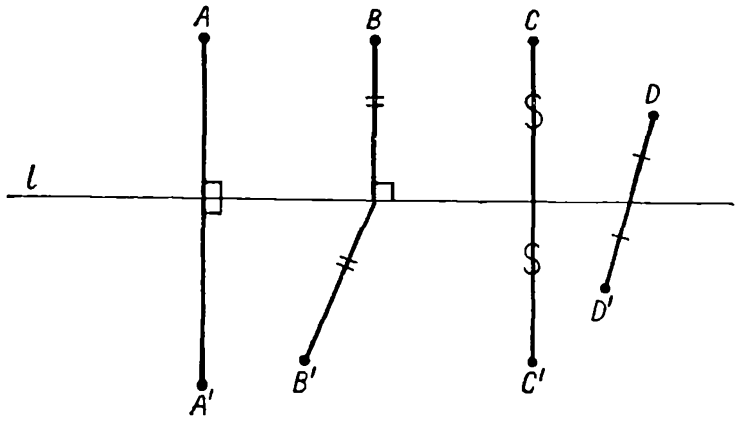


Рис. 73

Большинство учащихся (60% из 93 учащихся) основным в тексте посчитали определение осевой симметрии, хотя в тексте содержались и другие не менее важные сведения. Несмотря на это, самостоятельно выделить необходимые и достаточные признаки этого понятия и использовать их в новой ситуации смогли только 38% учащихся (эти учащиеся написали правильное определение), 53% включили в определение недостаточное число признаков.

Что касается третьего пункта этого задания, то следует отметить, что только 50% учащихся правильно установили симметричность точек C и C'. Большинство учащихся показали неумение пользоваться логическим правилом подведения под понятие. Утверждали, что выбранные ими точки симметричны, на основе выполнения только одного из признаков этого понятия.

З а д а ч а 5 б. Какими способами можно установить, что данный четырехугольник — параллелограмм?

Дан четырехугольник $ABCD$. Середины сторон этого четырехугольника последовательно соединены. Докажите (не менее чем тремя способами), что полученный четырехугольник — параллелограмм.

Задача была направлена, в частности, на выяснение уровня системности знаний, на умение находить различные способы решения одной и той же задачи.

При ответе на первый вопрос задачи нужно было указать, что установить принадлежность четырехугольника множеству параллелограммов можно, убедившись: а) в параллельности противоположных сторон (по определению), или б) в параллельности и конгруэнтности двух противоположных сторон, или г) в конгруэнтности противоположных сторон.

Результаты выполнения этого задания показали, что изучаемые школьниками различные теоретические положения (даже в

курсе геометрии) не выступают в их сознании в качестве целостной системы: целевое назначение изучаемой теоремы учащимися по существу не осмысливается, в качестве рабочего инструмента теория выступает слабо. На первый вопрос задачи ни один школьник не дал правильного ответа; вторую часть задания в соответствии с требованиями задачи полностью также не выполнил ни один из них (наивысшим достижением было приведение правильного доказательства теоремы одним способом (14% из 72 испытуемых).

Задача 6. Рассмотрите следующие пропорции, члены которых целые числа: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$; $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}$; $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$; $\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$.

Заметим, что $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10 = 400 = 20^2$
$3 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 = 36 = 6^2$
$4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 6 = 576 = 24^2$
$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 = 256 = 16^2$.

Найдите объяснение этому факту. (Сформулируйте утверждение в общем виде и докажите его.)

Этой задачей проверялось: а) понимание школьниками смысла требования обосновать утверждение; б) умение индуктивно выводить общее утверждение (способность к обобщению); в) умение применять известные знания в новой ситуации.

Предполагалось, что учащиеся, записав пропорцию в общем виде $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}$, запишут затем общий вид свойства, проиллюстрированного данными в условии задачи примерами $m \cdot n \cdot k \cdot l = (m \cdot l)^2$ и докажут это утверждение, используя известное им основное свойство пропорции $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}$, откуда по основному свойству пропорции имеем $m \cdot l = n \cdot k$. Поэтому $m \cdot n \cdot k \cdot l = (m \cdot l) \cdot (n \cdot k) = (m \cdot l) \cdot (m \cdot l) = (ml)^2$. Предусматривалось и неполное решение этой задачи: учащиеся запишут данное свойство в общем виде $(m \cdot n \cdot k \cdot l) = (m \cdot l)^2$ и проверят его истинность одним-двумя своими примерами. Всего выполняло задание 203 школьника, из них верно решили задачу 109 человек (49,5%). Из числа школьников, не сумевших решить эту задачу правильно и полностью: а) сумели сформулировать утверждение в общем виде 93 человека (46,5%); б) подтвердили это утверждение, выполнив необходимые операции на конкретном примере, 32 человека (16%); в) сделали правильную попытку применить основное свойство пропорции, но не довели выкладки до конца 81 человек (40,5%).

Результаты выполнения этого, нестандартного для учащихся VI класса задания следует признать неплохими. 50% учащихся из данной выборки показали понимание требования обосновать утверждение и умение это сделать; 96% обнаружили способность обобщить частные факты в виде общего утверждения. Неумение 40% учащихся провести доказательство вполне закономерно, если

учесть, что школьники еще только начинают (и то только в курсе геометрии) проводить доказательства, как таковые. Вместе с тем неумение провести весьма несложное по структуре рассуждение свидетельствовало о том, что обучение доказательству (как особому виду математической деятельности) не проводилось учителем планомерно. Опыт учащихся в доказывании утверждений накапливается понемногу (по мере необходимости, диктуемой ходом изучения геометрии). Специальные задачи с такими обучающими и развивающими функциями (как ведущими) не ставятся. Проведенное с учащимися, выполнявшими это задание, собеседование показало, что многих поначалу поставило в тупик само требование провести доказательство утверждения алгебраического характера.

Анализ результатов проведенных исследований показал, что, несмотря на положительные качественные сдвиги в математическом развитии отдельных учащихся, для большинства из них характерен еще весьма невысокий уровень мыслительных умений. В силу того что до сих пор учебная деятельность большинства учащихся (а значит, и уровень преподавания) имеет по преимуществу репродуктивный характер, их знания (и понимание изученного) находятся на уровне, соответствующем именно такому характеру обучения. Следует отметить, что исследования были проведены со школьниками, которые только первый год приступили к изучению систематического курса математики. Поэтому категорических выводов относительно влияния нового содержания обучения на математическое развитие школьников из полученных результатов сделать было нельзя. Тем не менее выявились возможности для более эффективной работы в этом направлении посредством повышения роли и места процесса учения в целом, а главное — необходимость целенаправленной работы учителя над формированием у школьников математического развития и навыков самостоятельного учебного труда, в первую очередь по следующим аспектам:

1) приобщить учащихся к работе с объяснительным текстом учебника (научить выделять и запоминать главное, самостоятельно устанавливать взаимосвязи изученного и нового, уметь использовать знания на практике и т. п.);

2) научить школьников активно оперировать признаками, определяющими понятие;

3) обращать внимание на главное целевое назначение изученного понятия, теоремы, аксиомы для дальнейшего изучения теории и возможного использования в ходе решения задач (т. е. на конкретизацию);

4) приобщить школьников к исследовательскому подходу при решении поставленных задач и к накоплению опыта решения задач.

Рассмотренные выше задания могут быть использованы для проведения кратковременных самостоятельных проверочных

работ, которые оправдали себя в практике современного обучения математике. Предполагается, что учащиеся в ходе выполнения таких работ могут обращаться за помощью к учителю, использовать учебник и справочные материалы. Для их постановки могут с успехом использоваться как отдельные задачи, так и небольшие серии задач.

Важно отметить полезность определенной нестандартности этих задач, позволяющую дополнять ими задачи, рекомендуемые в пособиях типа «Дидактические материалы» (в основном используемые учителем при проведении кратковременных самостоятельных работ).

При этом следует иметь в виду, что нередко возникают ситуации, когда небольшое смещение акцента в заданиях, почти аналогичных, резко влияет на успешность его выполнения. В одном из экспериментальных исследований, проведенных автором, перед 200 учащимися VI классов и столькими же учащимися VII классов были поставлены следующие задачи.

З а д а ч а (VI класс). Две стороны треугольника имеют длину 5,2 *см* и 2,4 *см*. Длина третьей стороны выражается целым числом сантиметров. Найдите множество значений длины третьей стороны.

З а д а ч а (VII класс). Существует ли треугольник, длины сторон которого равны 2 *см*, 4 *см* и 8 *см*? Ответ обосновать.

На первый взгляд вторая задача кажется легче задачи первой. Однако с решением первой задачи успешно справились 45% шестиклассников, а с решением второй справились успешно менее 33% семиклассников. Результаты, по нашему мнению, объясняются тем, что обоснование в ходе решения второй задачи является весьма существенным его компонентом, затрудняющим учащихся VI — VII классов. Поэтому одну и ту же по существу задачу очень полезно использовать в различных формулировках, прежде всего, при проведении полусамостоятельных работ, в ходе которых у школьника имеется возможность обсуждения возможного решения задачи с учителем или товарищами.

Итак, выступая в качестве основного средства контроля и оценки знаний по математике, задачи, как правило, предлагаются учащимся в форме контрольной или самостоятельной работы (проверочного характера). Как уже было сказано, каждая контрольная (или самостоятельная) работа должна преследовать четкую цель. Если говорить об общей цели той или иной контрольной работы, то она обычно определяется основным содержанием изученного учебного материала на том этапе обучения, на котором она проводится. Как правило, такие работы проводятся после изучения определенной темы курса (или законченного ее фрагмента, достаточно значимого в системе обучения).

Основной целью работы является в этом случае проверка состояния знаний (умений и навыков) учащихся по определенной теме курса. Однако, памятуя о том, что математические знания

и опыт учащихся, выявленные даже на материале определенной темы, представляют собой органически связанную совокупность общих и конкретных знаний (в число которых входят и многие общие и конкретные знания и опыт, полученные школьниками при изучении предыдущих тем курса). Поэтому важно не только предусмотреть содержанием работы возможность всесторонней проверки всех конкретных компонентов математических знаний и опыта учащихся по данной теме, но и спрогнозировать наиболее характерные ошибки, которые могут возникнуть в ходе ее выполнения. И если первое требование реализуется в перечне обучающих функций каждой задачи, входящей в работу, то второе обычно предусматривается в перечне возможных ошибок.

В настоящее время такая работа в ходе подготовки контрольных работ проводится лишь официальными органами, осуществляющими проверку состояния знаний учащихся на каком-либо этапе обучения. Между тем тщательная подготовка контрольной (и проверочной самостоятельной) работы должна была бы проводиться каждым учителем математики.

Комплекс математических задач, выполняющих функции контроля, следует считать эффективным (ожидать от его постановки позитивных результатов), если содержание, форма и последовательность составляющих его задач удовлетворяет следующим основным условиям:

через результаты их решения учащимися может быть достигнута основная цель осуществляемого на данном этапе обучения контроля;

определена дидактическая значимость каждой из составляющих его задач по сравнению с другими;

выявлены все конкретные функции каждой задачи, реализация которых предусмотрена в ходе или результате ее решения;

определена схема предстоящего анализа результата работы учащихся по решению всех задач комплекса;

заранее решена и оформлена запись решения каждой задачи на уровне, ожидаемом от учащихся, с учетом возможных различных способов решения;

по прогнозируемым общим результатам работы намечены направления дальнейшей работы учителя (и учащихся) по ликвидации обнаружившихся пробелов.

При подборе комплекса математических задач с целью контроля и оценки знаний, умений и навыков по любому разделу курса математики в содержание (или в предполагаемый способ решения) некоторых задач необходимо включить элементы, дающие возможность проверить уровень владения школьниками теми или иными мыслительными умениями, входящими в состав математического развития.

Примерами таких умений являются:

умение проводить исследование данной задачной ситуации по тем или иным параметрам;

умение применять имеющиеся знания и опыт в новой ситуации (при нестандартной для учащихся форме вопроса задачи, непривычной для них формулировке и т. п.);

умение сконструировать математическую модель простейшей задачной ситуации, интерпретировать результаты работы над математической моделью;

умение логически рассуждать, правильно использовать примеры и контрпримеры в математических рассуждениях и т.д.

Естественно, что в процессе контроля и оценки математической подготовленности школьников необходима и возможна дальнейшая реализация различных целей обучения, воспитания и развития наряду с коррекцией применяемой методики обучения.

5. ОТБОР ЗАДАЧ УЧИТЕЛЕМ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Характерная для периода перехода школы на новое содержание обучения математике определенная регламентация деятельности учителя проявляется и в ходе постановки задач.

В пособиях типа «Книга для учителя» и «Дидактические материалы» уже подобраны задачи для самостоятельных и контрольных работ, для устного решения по каждой учебной теме. Подобраны также и распределены по пунктам учебника основные и дополнительные задачи, сопровождаемые рекомендацией о желательности решения одних в классе, других — в ходе выполнения домашнего задания.

Учителю (и не только начинающему) остается проделать разве что такую работу:

а) прорешать все задачи пункта учебника и разобраться в назначении каждой из них;

б) распределить задачи между уроками в тех случаях, когда на изучение этого пункта отводится более одного урока;

в) расположить отобранные на урок задачи по степени трудности, приведя их в соответствие с последовательностью изучаемого теоретического материала;

г) подобрать на урок дополнительные задачи (подобные уже решенным) для ликвидации пробелов в знаниях у отстающих учащихся или задачи для того, чтобы загрузить работой наиболее успевающих.

Опытные учителя, используя задачи повышенной трудности, решают их в связи с изучаемым теоретическим материалом (а не только в конце учебного года). С этой целью они подбирают соответствующие задачи, перемежая ими обычные задачи, задают их на дом в качестве необязательного задания, а затем на следующем уроке делают их решение достоянием всех учащихся класса.

Таким образом, на сегодняшний день учитель фактически устранен от серьезной работы по подбору задач. Однако даже при таком

положении дел для учителя, как правило, остаются неизвестными функции той или иной задачи, а следовательно, оптимальная методика их постановки и решения, отличная от методики, направленной на успешное (и быстрое) решение той или иной задачи вообще. Можно в какой-то степени предположить, что авторами учебников и методических руководств подобраны задачи, обеспечивающие реализацию всех необходимых обучающих функций. Но и при таком предположении, как показывает практика обучения, развивающие и воспитывающие функции задач реализуются не систематически, далеко не полностью и, как правило, учитель процессом их реализации не управляет. Более того, и в реализации обучающих функций предлагаемая учителю последовательность решения тех или иных задач учебника и рекомендуемое число задач для решения к данной теме далеко не всегда являются оптимальными. Учитель, лишенный необходимости серьезно продумывать вопрос о том, какие задачи необходимы и достаточны для реализации той или иной учебной цели, часто буквально следует данным ему рекомендациям. Поэтому сплошь и рядом он не использует эффективно те возможности обучения, воспитания и развития учащихся, которые заложены в той или иной конкретной задаче (или серии задач), помещенной в учебнике, и нередко тратит впустую драгоценное учебное время.

Нами (совместно с Т. В. Монаховой) в 1973 г. было проведено весьма интересное исследование, давшее поучительные результаты, подтвердившие правильность этого вывода. Была высказана гипотеза о том, что задачи, подобранные в учебнике к той или иной теме курса, являются избыточными по числу для реализации необходимых обучающих функций. Было высказано также предположение о том, что сокращение их числа за счет упорядочения той последовательности, в которой они помещены в учебнике, и выявления их ведущих обучающих функций, не окажет отрицательного влияния ни на качество знаний учащихся по изучаемому теоретическому материалу, ни на уровень сформированности соответствующих умений и навыков.

Для исследования была взята первая глава курса алгебры VI класса «Употребление букв в алгебре»[1], в которой многие сведения, полученные учащимися IV—V классов, повторяются, углубляются, обобщаются и систематизируются. При подготовке соответствующего экспериментального материала мы руководствовались следующими положениями:

1) закрепление навыков в действиях с рациональными числами целесообразно отрабатывать на протяжении всего учебного года, а не только в самом его начале. Поэтому существует реальная возможность разгрузить первые уроки алгебры в VI классе;

---

[1] См.: Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра. 6 класс. Учебное пособие. Под ред. А. И. Маркушевича. М., 1975, с. 3—31.

2) целесообразно уменьшить число однотипных задач, связанных с новым материалом, повышая при этом обучающие функции каждой из задач.

В книге для учителя «Алгебра VI» дидактические функции упражнений каждого пункта первой главы определены несколько расплывчато, представлены в неявной форме. В связи с этим для учителей, проводивших эксперимент, была составлена таблица основных обучающих функций рекомендуемых упражнений по каждому пункту первой главы с указанием на то, когда каждое упражнение должно быть выполнено (в классе или дома), и даны краткие методические рекомендации. Заранее предполагалось, что объем практического материала, который должен быть рассмотрен при изучении главы «Основные понятия», полностью определен этой таблицей и приложением к ней.

По учебному плану первая контрольная работа проводится на 9-м уроке, а вторая — на 16-м. Поскольку предложенное сокращение практического материала преследовало цель выявить некоторый резерв учебного времени, естественно было ожидать, что сроки проведения как первой, так и второй контрольных работ окажутся сдвинутыми. Поэтому сроки проведения контрольных работ не устанавливались; учитель самостоятельно планировал предложенный практический материал и соответственно устанавливал свои сроки проведения контрольных работ (которые проводились по текстам, предложенным в официальном методическом руководстве)[1]. Высвободившееся учебное время учитель использовал на изучение более сложных вопросов программы (по своему усмотрению).

Результаты этого эксперимента были подвергнуты статистической обработке и сравнительному анализу. Оказалось, что качество выполнения контрольных заданий как в экспериментальных, так и контрольных классах в среднем одинаково. Тем самым была показана возможность и целесообразность упорядочения и систематизации задач учебника для того, чтобы реализация их обучающих функций проходила более оптимально. Заметим, что в данном экспериментальном исследовании преднамеренно не усиливались развивающие и воспитывающие функции задач и упражнений учебника, хотя возможность такого усиления существовала.

Результаты этого эксперимента показали возможность высвободить учебное время за счет сокращения обязательного практического материала, даваемого в учебнике, при определенном усилении обучающих функций оставшихся задач и упражнений. Имея в виду, что современный школьный курс математики достаточно насыщен содержанием, вопрос о дополнительном резерве времени является весьма актуальным.

---

[1] См.: Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра в VI классе. В помощь учителю. Под ред. А. И. Маркушевича. М., 1972, с. 252—253. (Контрольные работы 1, 2.)

Было показано также, что ориентация учителя на серьезное отношение к проблеме отбора задач является одним из необходимых условий повышения эффективности постановки задач в школьном обучении.

Вопрос о том, чем же должен руководствоваться учитель при подборе учебных задач, издавна обращал на себя внимание методистов[1].

Обобщая известные из литературы рекомендации по отбору задач учителем математики и опыт современного обучения математике (и опуская частности), укажем на следующее. В ходе подготовки учителя к уроку следует прежде всего четко установить:

1) соответствует ли подбор задач в целом основной учебной цели урока, отвечает ли он его содержанию, т. е. реализуются ли через данные задачи основные обучающие функции;

2) достаточен ли объем задачного материала для того, чтобы все учащиеся сумели активно и эффективно решить ту или иную задачу в течение учебного времени, запланированного для этого;

3) в какой мере реализуются в задачах их развивающие функции; как они согласуются с конкретными обучающими функциями;

4) достаточно ли оптимально представлено в задачах и упражнениях соотношение конкретного с абстрактным, насколько полно отражена в задачах взаимосвязь между теорией и практикой, связь обучения математике с жизнью;

5) как, в какой форме, с какой полнотой будут оформляться записи решения задач на доске, в тетрадях учащихся, каким образом задачи и упражнения будут решаться устно (по записи, заготовленной заранее на доске, по условиям, изображенным на плакате, по тексту, демонстрируемому через кодоскоп, и т. п.);

6) в какой мере предлагаемые на уроке задачи опираются на задачи и упражнения, выполненные ранее, какова мера их новизны (нестандартности) для учащихся;

7) отвечает ли задачный материал цели возбуждения и развития интереса учащихся к изучаемой теме, к математике в целом;

8) в какой мере через данные задачи могут быть реализованы воспитывающие функции, в какой мере содействуют задачи: а) воспитанию на уроке ответственного отношения учащихся к учению; б) воспитанию умений самостоятельно учиться; в) эстетическому воспитанию; г) воспитанию коммунистического мировоззрения и т. д.

Для того чтобы учитель математики в ходе своей подготовки к уроку мог ответить на поставленные вопросы, связанные с подбором задач, необходимо:

а) прорешать все задачи, которые ему представляется возможным поставить на данном уроке (по возможности несколькими способами);

---

[1] См., например, в сб.: Вопросы перестройки обучения математике в школе. Под ред. А. И. Гибша. М., 1963, с. 37.

б) анализируя условия задач и способы их решения, выявить их основные обучающие функции, возможные развивающие и желательные воспитывающие функции каждой задачи; установить, какие из этих функций следует считать ведущими, какие — второстепенными (следует обратить внимание на то, что часто та или иная функция задачи может быть реализована не столько самой задачей или ее решением, сколько соответствующим направлением процесса решения);

в) установить сложность (и предположить возможную степень трудности для учащихся) каждой задачи из данного набора, расположить их по степени возрастания сложности и трудности, выявить аналогичные друг другу задачи;

г) на основе собственного опыта работы и конкретных условий обучения установить примерное число задач, необходимых для реализации той или иной конкретной цели обучения, воспитания и развития, достижение которой предполагается на данном уроке;

д) продумать вопрос о систематизации знаний и опыта школьников на основе отобранных для решения задач и т. д.

Достаточно важным при отборе учителем задач к конкретному уроку математики является продумывание той методики, которая будет сопровождать постановку той или иной задачи, ее решение, обсуждение результатов решения, оформление решения и т. д. Нередко можно наблюдать, что даже опытные учителя математики не придают должного значения предварительному продумыванию методики работы над задачей. Так, например, нередки случаи, когда, не продумав вопрос о том, как ознакомить учащихся с условием той или иной задачи, учитель непроизводительно тратит драгоценное учебное время на выписывание (на доске и в тетрадях) условий задач, приведенных в учебнике; слабо использует схемы и рисунки для краткого изображения условия, экранные средства для демонстрации условий задач, предназначенных для коллективного устного решения, и т. п.

Просматривая конспекты уроков многих учителей, часто приходилось наблюдать в них только записи номеров задач из учебника, которые отобраны для классной и домашней работы; вопрос о том, как эти задачи и их решения будут оформляться учащимися, учителем заранее не продумывался.

Между тем существует немало достаточно общих вопросов методики работы над задачей, ответы на которые учитель должен знать заранее, чтобы обеспечить эффективную работу учащихся при их решении.

К числу таких вопросов относятся, например, следующие:

а) как ознакомить учащихся с условием данной задачи, проверить ее понимание, как зафиксировать условие на доске и в тетрадях;

б) как помочь учащимся найти решение данной задачи, усвоить его и кратко записать это решение;

в) целесообразно ли решать данную задачу несколькими способами;

г) каково значение данной задачи и ее решения для дальнейшей деятельности учащихся и т. д.

Продумывание этих вопросов относительно избранных задач не только должно иметь место при подготовке учителя к уроку, но и находить определенное отражение в конспекте учителя. Весьма важно при подготовке учителя к уроку решить вопрос и о том, что и как задавать учащимся на дом.

Знания, умения и навыки по учебному предмету учащиеся должны приобретать в основном на уроке; дома они должны закрепить изученное на уроке, повторить необходимый, ранее пройденный материал. Чаще всего задание учащимся для домашней работы состоит из двух частей: чтения объяснительного текста учебника (или конспекта) и решения задач. Первое регламентируется содержанием учебника и особых трудностей не представляет; более сложным для учителя является вопрос о подборе (по содержанию и объему) задачного материала.

В учебниках математики задачи, рекомендуемые для решения дома, как правило, распределены по пунктам учебника (особенно четко это выдержано в учебниках для IV—V классов). Имеется в виду, что перед изучением соответствующей темы учебника в классе учитель прорешает эти задачи и более или менее равномерно распределит их по урокам.

Опыт показывает, что в среднем в домашнем задании к каждому уроку целесообразно предлагать учащимся решить одну-две задачи по новому материалу и одну на повторение. Степень трудности задач, предназначенных для домашнего решения, не должна быть выше той, которая присуща задачам, решаемым на уроке (или решенным раньше).

Часто наряду с общим заданием всему классу у учителя возникает необходимость и в индивидуальных заданиях. Некоторым учащимся надо помочь ликвидировать пробелы в знаниях; другим — дать возможность полнее проявить имеющиеся у них повышенный интерес и способности к изучению математики. Для того чтобы удовлетворить запросы последних, им рекомендуются (в качестве необязательного задания) задачи повышенной трудности как из числа имеющихся в учебниках, так и отобранных учителем из других источников. Ясно, что при подготовке к уроку следует подумать и об этом.

Выполнению письменных домашних заданий учащихся необходимо специально обучать. В какой-то мере навыки самостоятельной работы учащиеся приобретают почти на каждом уроке, так как по каждой учебной теме проводится несколько кратковременных самостоятельных работ.

Важно своевременно обратить внимание на необходимость обучить школьников работе над задачей, работе с учебником и другими пособиями. Часть учащихся класса нуждается в том,

чтобы вначале несколько раз выполнить домашнее задание под наблюдением и руководством учителя во внеурочное время. Сложность заданий может возрастать (и должна возрастать) лишь по мере того, как растут возможности учащихся в их выполнении.

Учитывая специфику данного конкретного задания и возможности класса, учитель должен заранее продумать, в какое время урока и в какой форме он разъяснит учащимся следующие вопросы:

а) что надо сделать дома и зачем это нужно;

б) в какой последовательности и как выполнять домашнее задание;

в) каковы формы их отчета о результатах работы;

г) кто из учащихся (и когда) будет выполнять работу под руководством учителя или придет к учителю для консультации или для отчета о ее выполнении.

Отбирая задачи для классной и домашней работы, учитель должен заранее продумать вопрос о том, как будет проверяться их выполнение, что основное он должен проверить. Иными словами, учитель должен выявить и оценить основные контролирующие функции задач.

Известно, как часто на проверку домашнего задания тратится значительная часть урока. Нередки случаи, когда проверяется работа отдельных учащихся, в то время как остальные предоставлены самим себе.

По существу для объективной оценки знаний, умений и навыков учащихся вполне достаточно того, что учитель:

а) проводит и проверяет письменные контрольные и самостоятельные работы учащихся, устно опрашивает их по важнейшим вопросам программного материала;

б) в определенной системе фронтально и выборочно проверяет их тетради;

в) наблюдает за работой учащихся в процессе объяснения и закрепления учебного материала на уроке и по совокупности наблюдений выставляет оценки.

Опытные учителя постоянно предоставляют учащимся возможность самим убеждаться в том, что все эти оценки находятся в прямой зависимости от их отношения к выполнению заданий в классе и дома, что случаи невыполнения заданий не остаются без последствий. В работе учителей, установивших с учащимися класса правильные взаимоотношения, сами учащиеся приходят к учителю и заявляют о случаях невыполнения домашнего задания, невыясненных вопросах и нерешенных задачах. Поэтому при подготовке к уроку все конкретные формы контроля за работой учащихся по решению задач следует, на наш взгляд, разрабатывать с учетом этих общих рекомендаций.

6. О ФОРМИРОВАНИИ УМЕНИЯ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

Эффективность использования математических задач как ведущего средства привития учащимся элементов математической культуры непосредственно зависит от того, насколько учащиеся владеют определенной совокупностью мыслительных умений, составляющих так называемое умение решать задачи.

Умение решать задачи, присущее некоторому субъекту, можно рассматривать как специфическую окружающую среду системы (S, R) (субъект — задачная система), которая существенно влияет на возникновение для него некоторой задачи, а также на успешность процесса ее решения.

С другой стороны, умение решать также представляет собой определенную систему, функционирование которой изображается следующей схемой:

Умение решать задачи			
Знания	Мыслительные умения		Опыт
	Качества мышления	Нравственные качества	

Умение решать задачи образует сложный комплекс, который содержит активно действующие математические знания (и соответствующие им специальные умения и навыки), опыт в применении знаний и определенную совокупность сформированных свойств мышления, называемую нами в дальнейшем мыслительными умениями, проявляющимися в процессе решения задач. Последние, в свою очередь, представляют собой органическое сочетание качеств научного мышления (стиля мышления), определенных нравственных качеств личности (увлеченность, настойчивость, волю, уверенность в своих силах и т. д.) с определенными проявлениями математического мышления.

К числу *основных мыслительных умений*, функционирование которых характерно для процесса решения нестандартных для субъекта задач, относятся следующие умения:

1) Анализировать данную ситуацию с целью выявления существенного (данные, известные, искомые, неизвестные элементы, свойства и отношения); с целью установить полноту (достаточность, недостаточность, избыточность), непротиворечивость (или противоречивость), независимость (или зависимость) условия задачи или ее элементов.

2) Соотносить неизвестные элементы задачи с известными (данные с искомыми); распознавать известные или данные элементы в различных (в том числе и в новых) сочетаниях; сопоставлять данную задачу с известными задачами (классами задач).

3) Выявлять скрытые свойства задачной ситуации; реорганизовывать известные элементы (свойства или отношения) для

их функционирования в новом качестве, новых сочетаниях; создавать новые комбинации известных понятий и фактов, относящихся к элементам данной задачи, соотнося их с ее условием и целью.

4) Конструировать простейшие математические модели данной задачной ситуации (а также графические, схематические и т. п. изображения задачи); отождествлять элементы задачи с элементами модели; устанавливать изоморфность модели и данной задачной ситуации в существенных для решения задачи свойствах и отношениях.

5) Обнаруживать структуру данной задачной ситуации, задачи и ее элементов; воспроизводить эту структуру в различных состояниях; самостоятельно разрабатывать соответствующую микротеорию; выявлять детали, полезные с точки зрения общей структуры задачи или ведущей идеи поиска ее решения.

6) Осуществлять мысленный эксперимент, предвидеть его промежуточные и конечный результаты; индуктивно строить гипотезы, высказывать разумные догадки; расчленять данную задачу на подзадачи (последовательное решение которых приводит к решению основной), выявлять частные задачи (решение которых ведет к установлению элементов, важных для решения основной).

7) Ограничивать индуктивный поиск соображениями интуиции, логики и здравого смысла; проверять выдвигаемые гипотезы дедуктивным путем, опровергать контрпримером; скрупулезно, уверенно и грамотно проводить соответствующие выкладки.

8) Интерпретировать результаты работы над моделью данной задачной ситуации; кодировать язык ситуации в терминах модели и декодировать (в терминах ситуации) результаты, выраженные на языке модели.

9) Оформлять свои мысли (найденное решение задачи) кратко и четко (символически, текстом, графически и т. д.); наглядно иллюстрировать ведущие идеи.

10) Критически оценивать результаты решения задачи с различных точек зрения (правильности, экономичности, эстетичности, значимости и т. д.); обобщать результаты решения задачи (или специализировать их); исследовать возможные частные и особые случаи.

11) Эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче и в процессе ее решения или результатах; систематизировать эту информацию, соотнося ее с имеющимися знаниями и опытом.

Названные мыслительные умения, органически сочетаясь с известными методами научного познания, образуют совокупность общих приемов решения задач, которые выражаются в форме эвристик, повышающих эффективность процесса решения

нестандартных задач (не гарантируя, естественно, получения результата).

Сформированность у учащихся умения решать задачи обеспечивает их продуктивную работу в ходе решения задач и тем самым способствует повышению эффективности и качества воспитывающего и развивающего обучения математике.

Умение решать задачи формируется в процессе обучения математике, если методика обучения направлена на всестороннее развитие у учащихся соответствующих мыслительных умений; если в процессе решения учебных математических задач учащиеся ориентируются на усвоение соответствующих общих приемов решения; если они обучаются им целенаправленно и систематически.

Эффективность формирования тех или иных мыслительных умений существенно зависит от степени нестандартности поставленной задачи (от того типа, по разработанной нами типологии, к которому она принадлежит в момент ее предъявления, см. часть 1), а также от того, на каком этапе процесса решения задачи акцентируется внимание при ее постановке и решении учащимися.

Результаты исследования показывают, что ведущая роль принадлежит задачам, названным нами проблемными (задачи третьего типа), затем — поисковым задачам (задачи второго типа). Решение задач, названных нами обучающими (задачи первого типа), не оказывает существенного влияния на формирование мыслительных умений, входящих в состав умения решать задачи.

Напомним, что в процессе решения нестандартных задач третьего типа (проблемных задач), если он осуществляется успешно, задача, как правило, трансформируется в задачу второго типа (поисковую), затем — в задачу первого типа и, наконец, в стандартную (на этапе оформления уже найденного решения). При постановке проблемной задачи (или обучающей) число трансформаций естественно снижается и тем самым снижается дидактическая ценность учебной задачи по весьма большому числу немаловажных ее параметров.

Наиболее эффективно мыслительные умения формируются на первом, втором и четвертом этапах процесса решения задачи, причем на каждом из них они формируются и проявляются с различной степенью эффективности.

Установленные взаимосвязи между проявлением (а следовательно, и возможностями формирования) мыслительных умений, процессом решения задачи и типологией задач можно проиллюстрировать на примере процесса решения следующей задачи:

«Найти числовое значение алгебраического выражения $A(x) = x^{333} + x^{33} + x^3 + 1967$, если значение x удовлетворяет условию $x^2 + x + 1 = 0$».

Приведем в сокращенном виде один из протоколов описания процесса решения этой задачи, зафиксированный нами, когда одному

из учащихся IX класса (умеющему решать задачи) было предложено «думать вслух».

«Задача, — рассуждал он, — кажется мне очень простой, а план ее решения очевидным. Уж не обычная ли это задача? Достаточно найти значение x из уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ и поставить найденное значение в выражение $A(x)$ (пытается это сделать).

Первая неудача: уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет действительных корней: $D = 1 - 4 = -3$.

Рассмотрим выражение $A(x) = x^{333} + x^{33} + x^3$. Может быть, его можно преобразовать в более простое? Попробую это:

$$x^{333} + x^{33} + x^3 = x^3 (x^{330} + x^{30} + 1) = x^3 (x^{30} \times (x^{300} + 1) + 1 = \ldots$$

Вряд ли стоит продолжать: проще не получается.

Итак, задача необычна; известный мне способ решения не приводит к цели в основном потому, что уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Подумаю над этим. Изменю это условие, сделаю его более простым. Пусть x удовлетворяет уравнению $x^2 - 5x + 6 = 0$, тогда $x = 2$, $x = 3$. Но $A(2)$ и $A(3)$ вычислить невозможно?! Вот и вторая неудача: значение $A(x)$ невозможно вычислить даже при весьма малом значении x. Подумаю об этом; ясно, что здесь могут быть только три конкретные возможности для вычисления значения $A(x)$: при $x = \pm 1$; 0. Тогда, может быть, $x = 1$, $x = 0$ или $x = -1$? (Проводит проверку.) Эти значения x не удовлетворяют условию $x^2 + x + 1 = 0$.

Намеченный поначалу путь решения задачи невозможен. Попытаюсь установить некоторые особенности условия.

1) Число 1967 вряд ли играет существенную роль для хода решения задачи (его нетрудно прибавить к любому числу; то, что это число весьма велико, можно считать просто «кознями» автора задачи, который, желая напугать, создает ложную трудность). Нетрудно заметить, что если бы x был равен 1, то $A(x) = 1970$ — год, во время которого я решаю задачу. Может быть, это подсказка? Но значение $x = 1$ невозможно; я в этом уже убедился! Да, если бы $1^{333} + 1^{33} + 1^3 + 1967 = 1970$, решение было бы красивым!

Не попытаться ли представить выражение как сумму и произведение выражений $x^2 + x + 1$? Попробую... Нет, это напрасно...

Изучу еще раз трехчлен $x^2 + x + 1$. Трехчлен не имеет действительных корней, и все же он равен 0 при каком-то x. Присмотрюсь к нему повнимательнее. Из каких членов он состоит? x^2; x; 1. Стоп! $x^2 + x + 1$ — мой «старый знакомый»: неполный квадрат суммы двух чисел x и 1. Как это я его сразу не узнал? Но, постойте, этот трехчлен если и попадался мне на глаза, то не один, а чаще с чем-то другим. В какой формуле? В формуле «разность кубов»! Нельзя ли преобразовать выражение левой части условия в разность кубов? Ведь она проще (короче). Конечно, можно, так как $x \neq 1$ и можно умножить обе части уравнения на $(x - 1)$. Итак,

имеем $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0\,(x - 1)$, следовательно, $x^3 - 1 = 0$. Что это мне дает? Условие стало короче, проще, к тому же $x^3 = 1$. Вот это да!

Полезно ли это равенство? Конечно, «лед тронулся»!

$A(x) = x^{333} + x^{33} + x^3 + 1967$ легко записать так:

$A(x) = (x^3)^{111} + (x^3)^{11} + x^3 + 1967$. Задача решена.

$A(0) = 1 + 1 + 1 + 1967 = 1970$. Правильно ли я решил задачу? Проверю... (проверяет). Все вроде бы верно, все законно. Странно, правда, что $x \neq 1$, а $x^3 = 1$? Ну ладно, об этом можно спросить у учителя. Может, и он удивится такому факту?»

Подвергнем анализу процесс решения этой задачи, зафиксированный протоколом.

Предварительно напомним, что следует различать сложность самой задачи от сложности решения задачи; трудность самой задачи от трудности процесса ее решения.

Говоря о сложности задачи, мы по существу имеем в виду сложность самой задачной системы R (число и характер свойств и отношений между элементами R и его подмножествами, в силу которых R выступает как система).

Говоря о сложности решения задачи, мы по существу говорим о характере перехода от начального состояния системы R_x к конечному R, оцениваем способ решения задачи, тесно связанный с его базисом (число и характер необходимых при этом преобразований, выкладок, шагов, подзадач и т. п.).

Таким образом, сложность самой задачи и сложность решения задачи являются в некотором смысле ее объективными характеристиками, часто не зависящими от субъекта, принявшего задачу (или того, кому задача адресована опосредованно), могущими быть заранее запрограммированными для субъекта.

Говоря о трудности задачи, мы по существу имеем в виду условия, при которых осуществляется контакт субъекта с системой R, осознание проблемности R_x, понимание смысла задачи.

Говоря о трудности процесса решения задачи, мы по существу говорим о характере взаимодействия субъекта и R_x, о его возможностях осуществить переход от R_x к R, о тех усилиях, которые им будут проявлены в процессе решения задачи.

Таким образом, трудность самой задачи и трудность процесса решения задачи являются ее субъективными характеристиками, зависящими от многих факторов (запаса имеющихся у субъекта знаний, степени их глубины и общности, уровня овладения им различными интеллектуальными и практическими умениями, наличия опыта в решении задач, интереса к задаче, степени потребности в ее решении и т. п.).

Понятно, что трудность задачи и трудность процесса решения задачи зависят также и от сложности задачи и ее решения.

Сложность и трудность проявляются на различных этапах взаимодействия субъекта с системой R_x в различных взаимосочета-

ниях. Так, например, бывает трудно понять смысл задачи, разобраться в ее условии; решить же данную задачу оказывается легко. Точно так же может казаться сложным осуществление на практике уже найденного в принципе решения или проверить правильность конкретного результата решения.

Вернемся к анализу рассмотренной ранее задачи.

Для учащихся, не изучавших комплексных чисел и впервые встречающихся с задачей этого типа, она принадлежит к виду *AXYB* (по разработанной нами типологии). В самом деле, условие и заключение задачи определены четко. Для учащихся, знакомых с вычислением значений алгебраических выражений, трудность самой задачи невелика (смысл ее очевиден).. Однако попытки решить ее, применяя известный алгоритм (мысленно или фактически) сразу оказываются бесплодными: процесс ее решения оказывается трудным.

Попытка предварительно преобразовать выражение $A(x)$ (т. е. попытаться создать условия для применения известного алгоритма) также быстро ведет к неудаче. Предположение о том, что задача не трудная, а просто сложно решается, неверно.

Деятельность в ситуации выбора неуспешна. Возникает необходимость переосмыслить условие и цель задачи, проанализировать данную задачную ситуацию заново. Задача оказывается сложной сама по себе (существующие в задачной системе связи достаточно глубоки и неявны).

Соотнесение данных и искомых, соотнесение задачи с известным типом, попытки расширить цель задачи (выполнить предварительные преобразования) не приводят к успеху.

Возникает естественное стремление попытаться решить задачу посредством целенаправленных проб. Разумно предположить, что требуемое вычисление практически возможно лишь в случае, когда модуль значения переменной есть нуль или единица; проверка этих возможностей тривиальна, но нерезультативна.

Чтобы отыскать перспективный путь поиска решения задачи, необходимо выявить скрытые свойства данных. После неудачи с преобразованием выражения $A(x)$, естественно сосредоточить внимание на условии $x^2 + x + 1 = 0$, попытаться создать новую комбинацию элементов данной задачи: выразить $A(x)$ в виде $F(x^2 + x + 1)$.

Однако и это не приводит к цели. Вместе с тем этот путь решения задачи содержит хорошую идею — реорганизовать элементы задачи для их функционирования по-новому. Наступает новый этап актуализации имеющихся знаний и опыта (возникающий на основе более глубокого и разностороннего анализа данной задачной ситуации), который приводит к распознаванию элемента задачи (условия, наложенного на переменную) как элемента известной, стационарной для решающего, системы — тождества сокращенного умножения.

Правда, замеченное сходство чисто внешнее; однако оно наводит на мысль о возможности более рационального (свернутого, короткого) представления условия $x^2 + x + 1 = 0$ в виде $x^3 - 1 = 0$. Оно правомерно, так как $x \neq 1$ (одна из безуспешных попыток решить задачу приносит и определенную пользу!).

Теперь возникает потребность нового соотнесения данных и цели, это приводит к обнаружению структуры данного выражения $A(x)$ и желательности ее реорганизации, воспроизведения в новом состоянии, в виде $\psi\, x^3$.

Задача сразу же становится стандартной для данного субъекта; она приведена им к виду $AC\boldsymbol{X}B$, а решение — очевидным и легким.

На этапе критического осмысливания проведенного решения задачи и его результата, его обоснованности для решающего (не знакомого с комплексными числами) остается неясным, почему при $x \neq 1$, $x^3 = 1$ (хорошо это или плохо — вопрос методики). Вместе с тем при попытке систематизации новых знаний и опыта выявляется полезное для запоминания — способ решения задачи, применимый к решению целого класса задач, аналогичных данной (в частности, при любом числе слагаемых $A(x)$ и любых, выраженных тройками, показателях степеней).

Проведенный нами анализ процесса решения данной задачи позволяет (в первом приближении) просмотреть функционирование второго, третьего (и частично пятого и последнего) блоков схемы мыслительных умений, проявляющихся при решении задачи. Одновременно он иллюстрирует двусторонний характер функционирования этих мыслительных операций.

С одной стороны, они выступают в качестве определенных приемов мыслительной деятельности решающего задачу субъекта, т. е. в качестве определенных средств, способствующих успешному решению задачи.

С другой стороны, в процессе решения задач, в котором они активно используются, эти мыслительные умения формируются; у решающего задачу субъекта накапливается успешный опыт в их применении (доверие к ним).

На данном примере также хорошо просматриваются и существующие взаимосвязи между перечисленными мыслительными умениями и типами задач, в процессе решения которых возможно их проявление. Так, при решении задач первого типа многие из рассмотренных здесь мыслительных операций почти не функционируют; при решении задач второго и третьего типов они проявляются весьма активно.

Легко наблюдается и взаимосвязь основных этапов процесса решения задачи с мыслительными умениями, наиболее активно функционирующими на том или ином этапе решения.

В ходе исследования удалось аналогично проследить указанные на блок-схеме взаимосвязи и по другим компонентам; тем самым

это дало возможность установить, что этапы процесса решения задачи, мыслительные умения (входящие в состав умения решать задачи) и типология задач представляют собой целостную систему.

Процесс решения задачи представляет собой наиболее важный и вместе с тем наиболее сложный компонент системы (S, R). Сугубо индивидуальный характер деятельности решающего задачу, обилие различных факторов, влияющих на результат этой деятельности, делают этот процесс трудноуправляемым. Правда, при постановке многих учебных задач управление процессом их решения школьниками часто не вызывает особых затруднений. Однако это происходит лишь потому, что школьные математические задачи — это либо задачи с заведомо известными способами решения, либо задачи, ход решения которых почти определен изучаемым в это время программным теоретическим материалом (например, при непосредственном закреплении только что изученного теоретического положения, явно выступающего в качестве базиса решения).

Таким образом, у многих школьных математических задач практически заданы все основные компоненты или же они представляют собой тренировочные упражнения, направленные на формирование тех или иных математических навыков на базе уже сформированных умений. Необходимость изменения системы задач школьного курса в направлении оптимального развития познавательной самостоятельности учащихся приводит к необходимости хотя бы в общих чертах охарактеризовать структуру процесса решения задачи, не являющейся стандартной; выявить комплекс тех мыслительных умений, которые, с одной стороны, служат средством нахождения решения, а с другой — могут быть сформированы в ходе решения таких задач.

На основе известной формулы процесса познания, данной В. И. Лениным, С. И. Шварцбурдом и В. В. Фирсовым, выработана дидактически ценная характеристика **процесса применения математики.** Выделяя в этом процессе три основных этапа: формализации, реализации и интерпретации, С. И. Шварцбурд отмечает, что любая система математического образования должна способствовать прежде всего овладению учащимися элементами математической культуры, проявляющимися на всех трех этапах применения математики. Он отмечает также, что в настоящее время это происходит в основном за счет обучения школьников элементам математической культуры на этапе реализации, так как большинство задач школьного курса математики выступают как полностью или частично формализованные системы.

Однако многие элементы математической культуры, проявляющиеся на первом и третьем этапах применения математики, можно формировать у школьников в процессе решения задач, посредством активизации работы на его отдельных этапах. Кроме того, в процессе решения задач возможно и полезно формирование у учащих-

ся отдельных элементов математической культуры, свойственных первому и третьему этапам применения математики, даже на этапе реализации, наиболее характерном для школьного обучения.

Тем самым может быть существенно усилена и прикладная направленность школьного курса математики.

Общепринятое в методике математики деление процесса решения учебной задачи на четыре основных этапа: осмысление условия задачи, составления плана решения, осуществление плана решения, изучение найденного решения—не нуждается в изменении. Однако изучение каждого из этапов, его детальная характеристика, оценка его значимости для математического развития учащихся настоятельно необходимы.

В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований установлено следующее.

На первом этапе процесса решения математической задачи имеют место осознание условия и требования задачи, усвоение и разработка отдельных элементов условия (или элементов цели), поиск необходимой информации в системе памяти, соотнесение условия и заключения задачи с имеющимися знаниями и опытом и т. д.

На втором этапе имеют место целенаправленные пробы различных сочетаний из данных и искомых, попытки подвести задачу под известный тип, выбор наиболее приемлемого в данных условиях метода решения (из известных), выбор стратегии решения, поиск плана решения и его корректировка на основе предварительной апробации, соотнесения с условием задачи и интуитивных соображений, фиксирование определенного плана решения задачи и т. д.

На третьем этапе проводится практическая реализация плана решения во всех его деталях, с одновременной корректировкой через соотнесение с условием и выбранным базисом, выбор способа оформления решения и оформление решения, запись результата и т. д.

На четвертом этапе фиксируется конечный результат решения, проводятся критический анализ результата (его прикидка и проверка), поиск путей рационализации решения, исследование особых и частных случаев, выявление существенного — потенциально полезного, систематизация новых знаний и опыта.

Сравнение мыслительных умений и практических действий, имеющих место в процессе решения задачи, с теми, что имеют место в процессе применения математики, показывает на определенную их идентичность. В процессе решения математических задач частично удается воссоздать комплекс элементов математической культуры, формирование которой является одной из важных целей математического образования.

Однако последнее возможно лишь при условии, что работа учащихся над решением задач методически продумана, а на ее

проведение отводится достаточное учебное время. Изучение опыта работы учителей математики показывает на существенные методические недостатки. Так, не уделяется должного внимания первому этапу процесса решения, второй этап решения задачи не занимает должного места; третьему этапу уделяется излишнее внимание, а четвертый, как правило, отсутствует. Это происходит потому, что в практике обучения математике сам процесс решения задач не рассматривается до сих пор как важнейшее средство обучения математике, математического развития и воспитания учащихся.

Основные затруднения у учащихся, решающих задачу, возникают прежде всего на начальном этапе процесса ее решения и на этапе поиска плана решения. Вместе с тем очень часто задача оказывается трудной лишь потому, что учащийся привык работать над задачей только в ситуации выбора, отбирать одну из известных ему альтернатив (способов решения, теоретических положений и т. д.), полагаясь только на свой прошлый опыт. Вынужденные переходить к самостоятельному поиску решения, учащиеся привыкли «хвататься за соломинку» — работать над той гипотезой, которая первой «пришла в голову», не заботясь особенно о ее разумности, не проводя критической ее оценки (даже простым соотнесением с условием задачи, часто заведомо противоречащим выдвинутой гипотезе). Столь же нередкими оказываются и «тавтологические ловушки», расставленные, заметим, самим решающим, и т. д.

Опыт показывает (и это не удивительно), что сплошь и рядом решение задачи обрывается в самом начале; это не только не приносит никакой пользы, но и подрывает у многих учащихся веру в свои силы. Учащиеся привыкли применять к решению задач известную им последовательность действий и рассуждать примерно так: я знаю, как это сделать, и если мои действия не приводят к желаемому результату, то мной была допущена техническая ошибка, и если она не обнаружена, решить задачу не удастся.

Эти трудности аналогичны тем, какие могли бы возникнуть при решении прикладной задачи математическими средствами на этапе ее формализации. Неумение построить вторичную модель (содержащую в своем языке способ решения задачи), найти теоретическую основу — базис решения задачи затрудняет учащихся не столько потому, что они не владеют определенными знаниями, сколько потому, что они не обладают о п ы т о м работы над условием задачи (опытом по существу близким к опыту работы на этапе формализации процесса применения математики).

Таким образом, обучение учащихся решению задач на различных этапах процесса решения задачи (особенно обучение решению задач на начальной его стадии, этапе поиска решения задачи и на заключительной стадии процесса решения) является необходимым условием формирования умения решать задачи, предметом специальной методики.

Исследования показали, что на начальном этапе процесса решения задачи полезно обучение учащихся следующей системе эвристик.

Ведущей эвристикой этого этапа следует считать известный афоризм: «Хорошо понять вопрос — значит наполовину ответить на него».

Реализация этой эвристики раскрывается в следующих рекомендациях начинающему решать задачу.

1) Начинайте изучение условия задачи с тщательно выполненных наглядных рисунков, чертежей, таблиц или иллюстрированных схем, помогающих осмыслить задачу. Помните, что правильное графическое представление условия задачи означает по существу четкое, ясное и конкретное представление о всей задачной ситуации в целом.

2) Ясно представьте себе элементы задачной ситуации; обстоятельно выясните, какие из них заданы, известны; какие из них являются искомыми, неизвестными.

3) Вдумайтесь в смысл каждого слова в тексте задачи (каждого символа, термина); постарайтесь выявить существенные элементы задачи; выделите на рисунке данные и искомые наглядными условными обозначениями. Попытайтесь видоизменить расположение элементов задачи на рисунке или схеме (возможно, это поможет выявить существенное в задаче).

4) Попытайтесь охватить условие задачи в целом, отметить ее особенности; попытайтесь вспомнить, не встречались ли вы раньше с задачей, в чем-либо аналогичной данной.

5) Подумайте, однозначно ли сформулирована задача; не содержит ли условие задачи избыточных, недостающих, противоречащих друг другу данных.

6) Внимательно изучите цель, поставленную задачей. Выявите, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом или с некоторыми ее элементами, ориентируясь на поставленную задачей цель.

7) Предполагая возможность использовать при решении задачи какой-либо из известных вам общих математических методов (метод уравнений, геометрических преобразований, координатный или векторный метод и т. д.), постарайтесь выразить элементы задачи на языке соответствующего метода (составить уравнение, выразить данные и искомые соотношения в координатной или векторной форме и т. д.).

На этапе составления плана решения (поиска решения задачи) полезно обучение учащихся следующей системе эвристик:

1) Попытайтесь соотнести данную задачу к какому-либо типу (виду) задач, способ решения которых вам известен. Если это не удается, постарайтесь выбрать один из известных вам методов решения, наиболее приемлемый в данных условиях.

2) Помните, что цель задачи выступает как главный ориентир направления поиска решения. Проанализируйте цель задачи и по-

пытайтесь применить для решения задачи тот или иной знакомый вам прием или метод.

3) Постоянно контролируйте разумность ваших попыток решить задачу, соотнося получаемые частные результаты с условием и целью задачи. Старайтесь ограничивать число пробных действий (мысленных или практических).

4) Попытайтесь видоизменить задачу, переформулировать ее условие, намеренно упростить условие (т. е. составить и попытаться решить задачу, аналогичную данной, но более простую); попытайтесь обобщить условие задачи (составьте задачу более общую, чем данная); попытайтесь заменить понятия, связанные с задачей, их определениями.

5) Расчлените условие задачи на отдельные элементы; постарайтесь составить новую комбинацию этих элементов (быть может, в каком-либо сочетании с другими, не рассматриваемыми в задаче элементами).

6) Попробуйте разбить данную задачу на серию вспомогательных задач, последовательное решение которых может составить решение данной задачи; попробуйте составить частные задачи к отдельным элементам данной задачной ситуации, руководствуясь при этом целью основной задачи.

7) Рассмотрите предельные случаи отдельных элементов задачи, просмотрите, как это отражается на основной цели задачи.

8) Подвергните какой-нибудь из элементов задачи определенному изменению, посмотрите, как отражается это изменение на остальных элементах задачи; попытайтесь высказать гипотезу, относящуюся к цели задачи на основе наблюдаемых результатов изменения ее элементов.

9) Если решить данную задачу не удается, отыщите в учебной (или популярной) литературе уже решенную задачу, похожую на данную. Изучите внимательно это «готовое» решение и постарайтесь извлечь из него пользу для решения данной задачи.

На заключительном этапе процесса решения задачи (на этапе проверки правильности полученного решения, систематизации знаний и опыта) полезно обучение учащихся следующей системе эвристик:

1) Изучите найденное вами решение задачи. Сделайте грубую прикидку правильности результата решения задачи, соотнеся его с ее условием (и здравым смыслом). Проследите обоснованность каждого шага решения задачи. Подумайте, нельзя ли решить задачу другим способом. Помните, что получение того же результата другим способом — лучшая проверка правильности решения задачи.

2) Попытайтесь отыскать способ решения задачи более экономичный, чем найденный; более общий; более изящный и т. п. (новый способ решения задачи часто открывает новый путь решения аналогичных задач, обогащает опыт решающего задачу).

3) Исследуйте особые случаи решения данной задачи; соотнесите результат решения с предельными значениями отдельных элементов. Попытайтесь обобщить результаты решения данной задачи; продумайте вопрос о том, при решении каких других задач их можно было бы применить.

4) Изучите еще раз саму задачу, способ ее решения и результат. Выявите то полезное, ради чего стоило решать задачу (что важно знать, уметь и помнить). Соотнесите новые знания и новый опыт, полученные вами при решении задачи с имеющимися у вас знаниями и опытом (систематизируйте их).

5) Обратите особое внимание на те теоретические положения, особенности задачи и т. д., которые явились ключевыми для отыскания данного (или других) решения задачи.

На этапе практической реализации плана решения задачи во всех его деталях важно обратить внимание учащихся на необходимость выбрать такой способ оформления решения, с помощью которого можно было бы зафиксировать решение в краткой и ясной форме, достаточной для того, чтобы иметь возможность (если это понадобится) полностью воспроизвести решение задачи.

Важно также, оформляя детальное решение задачи, одновременно корректировать его правильность соотнесением с условием, целью задачи и теоретической основой ее решения (базисом).

Исследования показали эффективность организации работы учащихся над решением нестандартных для них задач в соответствии со следующими методическими положениями:

1) В самом начале важно пробудить у школьников интерес к решению данной задачи, придать положительную эмоциональную окраску предстоящей работе. С этой целью следует так сформулировать или в таких условиях поставить задачу, чтобы у учащихся возникло желание работать над ее решением и стремление достичь результата.

2) После первоначальной постановки задачи, разъяснения ее смысла в целом, необходимо определенное время, которое дало бы возможность школьникам вжиться в задачу (проанализировать ее условие, четко выявить ее известные и неизвестные компоненты, осмыслить ведущий вопрос задачи), соотнести ее с имеющимися у них знаниями и опытом и высказать свои предложения о возможных направлениях поиска ее решения.

3) Если направление поиска решения задачи выбрано правильно, то можно перейти к разработке плана ее решения (его можно вести коллективно, под руководством учителя) и, после составления, перейти к непосредственному осуществлению решения и его оформления в записи (эту часть работы целесообразно предоставить самим учащимся).

4) Закончив решение задачи, следует осуществить его проверку (соотнесением результатов с условием, критическим осмысливанием правомерности каждого этапа решения), рассмотреть возможные особые случаи, попытаться найти иной способ решения и, на-

конец, выделить главное (то, что полезно знать, уметь и помнить в итоге работы над задачей).

5) Несмотря на важность постановки нестандартных для учащихся задач в школьном курсе математики, проводить систематическое обучение их решению на уроках почти невозможно хотя бы потому, что на это не хватит учебного времени. Понятно, что решение нестандартных задач остается пока уделом внеклассных занятий. Вместе с тем обучать некоторым методам и приемам их решения можно (и полезно) на уроке, например при введении задач нового типа (когда такие задачи еще не перешли в разряд стандартных) или при введении нового материала проблемным путем. Важно использовать любую возможность формировать у школьников общие приемы мыслительной деятельности, о б щ и е п р и е м ы решения задач в процессе решения к о н к р е т н ы х задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог исследованию, изложенному в данной работе, укажем на его основные результаты и сформулируем соответствующие им выводы.

I. Выявлены роль и место задач в процессе формирования математической культуры молодого поколения активных строителей коммунистического общества, необходимой для творческой работы на любой отрасли народного хозяйства в условиях НТР.

а) Дидактически правильная постановка и решение математических задач в школьном обучении является одним из эффективных средств всесторонней математической подготовки и гармонического развития личности, важнейшим средством предпрофессиональной политехнической подготовки выпускников средней школы.

б) Необходимо и возможно существенное повышение качества математического образования учащихся средней школы посредством соответствующих изменений в системе учебных математических задач школьного курса математики и методике использования задач в процессе его изучения.

в) Формирование математического мышления школьников предполагает целенаправленное и систематическое развитие всех качеств, присущих естественнонаучному мышлению, комплекса мыслительных умений, лежащих в основе методов научного познания, в органическом единстве с формами проявления мышления, обусловленными спецификой самой математики, с акцентом на постепенное развитие научно-теоретического мышления.

г) Математическому мышлению присущи и те качества мышления, по которым человек превосходит любую ЭВМ; целенаправленное развитие этих качеств у учащихся предполагает наличие в школьном курсе математики определенных типов задач, способов их постановки и решения школьниками.

д) Решение задач является ведущим средством математического развития учащихся, средством привития им элементов творческого мышления, существенно повышающим качество обучения и воспитания в процессе изучения школьного курса математики.

II. В результате проведенного психолого-дидактического исследования общего понятия задачи и процесса решения создана теоретическая база построения эффективной методики обучения школьников решению задач и обучения математике через задачи (построена модель общего понятия задачи, разработана типология, выявлены основные функции).

а) Задачу целесообразно рассматривать как особое состояние системы субъект — объект, а процесс ее решения как особую форму их взаимодействия. С дидактических позиций полезно выделение в качестве основных компонентов математической задачи условия, заключения, решения и базиса решения. Математический характер задачи вполне определяется математическим характером двух последних компонентов.

б) Типология учебных задач (в зависимости от числа основных компонентов, являющихся неизвестными данному субъекту и придающих объекту проблемный характер) охватывает все задачи, представленные в школьном обучении математике; в рамках данной типологии находят место все основные типы, которые в кибернетике соотносят с творческими.

в) В школьном обучении математике целесообразна постановка всех типов задач, отраженных в данной типологии. Возможно составление новых типов задач на базе почти любой школьной посредством изменения ее условия.

Система учебных математических задач и методика их использования в обучении, построенные в соответствии с данной типологией, дают возможность отсеять малоэффективный задачный материал, а следовательно, сократить объем учебного математического материала в целом.

г) На основе известной характеристики процесса применения математики можно охарактеризовать основные этапы процесса решения задачи и выявить комплекс элементов математической культуры. При этом сам процесс решения задач должен рассматриваться как важнейшее средство обучения математике, математического развития и воспитания. Правильная методика обучения решению задач должна быть построена с учетом значимости каждого этапа решения для реализации конкретных целей в системе воспитывающего и развивающего обучения математике.

д) В качестве основных функций задач в обучении математике выделены: обучающие, воспитывающие, развивающие и контролирующие. Каждая учебная задача может и должна нести в себе наряду с ведущей функцией другие, реализация которых повышает эффективность использования задач в обучении математике. Система задач школьного курса математики нуждается в серьезном усовершенствовании в направлении повышения дидактической значимости каждой учебной математической задачи через содержание, структуру или методику ее использования.

III. Разработана система требований к использованию задач как важного методического средства сознательного и прочного усвоения школьниками программного материала, воспитания у них диалектико-материалистического мировоззрения, интереса к предмету, творческих навыков учебной работы.

а) На современном этапе развития советской школы методы обучения математике призваны обеспечить не только сознатель-

ное и прочное усвоение школьниками основ математики и ее приложений, но и развитие у них широкого общеобразовательного кругозора, элементов творческого математического мышления, привитие им умений самостоятельно пополнять свои математические знания и накапливать опыт их применения. Поэтому эффективное функционирование задач в процессе обучения математике является необходимым условием повышения качества обучения, а правильное определение роли и места каждой математической задачи при изложении конкретной темы курса — одним из важнейших требований, предъявляемых к учебнику математики и к эффективной методике преподавания математики.

б) Задачи призваны играть большую роль в реализации через обучение математике важнейших воспитательных целей. Никогда не выступая в качестве ведущих, воспитывающие функции математических задач должны тем не менее реализовываться в ходе решения каждой учебной задачи. В этом отношении особенно важна прикладная направленность задач, проявление которой при изучении каждой темы курса математики является другим необходимым требованием, предъявляемым к учебнику математики, и одним из необходимых условий существенного повышения качества воспитывающего и развивающего обучения школьников математике.

в) Формирование у школьников интереса к решению задач является важнейшим средством формирования у них интереса к математике и к ее изучению и вместе с тем эффективным средством приобщения школьников к учебной математической деятельности творческого характера. Традиционно такая работа проводилась во внеурочное время; между тем имеется возможность и существует необходимость ее проведения в ходе непосредственного изучения школьниками программного материала. Для этого необходимо в процессе обучения математике систематически ставить определенные задачи (или серии задач), которые легко конструируются на базе помещенных в учебниках математики. Использование задач, развивающих творческие потенции учащихся, является важным условием повышения качества математической подготовки школьников, а наличие должным образом сформулированных задач в каждом разделе учебника — еще одним важным требованием к учебнику математики.

г) Каждый из известных способов постановки учебной проблемной ситуации, вырастающей затем в задачу (или последовательность задач), может быть смоделирован тем или иным набором компонентов $ACRB$, считающимися качественно или количественно неизвестными. Таким образом, в ситуации проблемного обучения наиболее ярко проявляется сущность обучения математике через задачи.

Однако для продуктивного обучения математике важно отобрать тот учебный материал, который может служить основой не только эффективного, но и эффектного проблемного изучения.

Поэтому наличие в учебниках математики заранее отобранных вопросов курса, изложенных в проблемной форме и предназначенных для самостоятельного изучения их школьниками, — еще одно важное требование к учебнику математики.

д) Эффективность применения задач в процессе контроля и оценки знаний во многом зависит от соблюдения определенной методической системы требований. Наряду с контролем математических знаний через задачи необходимо и возможно осуществлять контроль математического развития учащихся. Последнее возможно, если в содержание задач или предполагаемый способ их решения заложить возможность обнаружить уровень владения школьниками определенными мыслительными умениями, входящими в состав математического развития.

IV. Разработаны система требований к использованию задач как важного средства целенаправленного математического развития учащихся средней школы, основные положения методики обучения решению задач и комплекс требований к системе задач школьного курса математики.

а) Эффективность формирования важнейших элементов математической культуры зависит от того, насколько учащиеся владеют определенной совокупностью мыслительных умений, объединенных нами под общим названием «умение решать задачи».

б) Традиционная система школьных математических задач не обеспечивает формирования важнейших из этих умений и, следовательно, комплекса в целом. Эффективная методика обучения школьников общим приемам решения задач, формирования у них должного математического развития может быть обеспечена в рамках разработанной типологии и должна быть скоординирована с основными этапами процесса решения.

в) Обучая школьников решению задач, следует выделить начальную стадию, стадию поиска плана решения, заключительную стадию. Методическим обеспечением указанных этапов обучения школьников решению задач являются определенные системы учебных эвристик.

г) Опыт показывает полезность, начиная с VII класса, постановки специального сквозного факультативного курса по решению математических задач, непосредственно не связанных с изучаемым программным материалом. Вместе с тем в ходе факультативного обучения решению задач могут быть осуществлены и основные цели факультативных занятий: расширение и углубление знаний по школьному курсу математики.

д) Эффективность использования задач во многом определяется методикой их использования в процессе обучения математике, которая, в свою очередь, во многом определяется четко продуманной системой отбора задач к каждому уроку математики. Сформулированные в работе требования к отбору задач являются вместе с тем требованиями, выполнение которых должно быть заложено в учебниках математики.

Возможность представить в учебниках математики ограниченный (и вместе с тем достаточный для реализации выявленных дидактических функций) набор задач, который отвечает указанной системе требований к задачному материалу, можно считать одним из практических выходов результатов данного исследования в проблему конструирования современного школьного учебника математики.

В плане возможных дальнейших изменений содержания школьного курса математики в близком и обозримом будущем следует особо подчеркнуть, что оно потребует одновременного и адекватного ему изменения всей системы учебных математических задач. Это положение должно учитываться в любом экспериментальном исследовании, направленном в перспективе на модернизацию математического образования.

Можно предвидеть, что уже в обозримом будущем обучение математике в средней школе будет представлять собой процесс решения определенной, методически продуманной последовательности учебных математических задач, в ходе которого будет обеспечено как усвоение основ математических знаний, так и воспитание соответствующей требованиям времени математической и общей культуры.

ИБ № 1874

Юрий Михайлович Колягин

ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ II

Редактор *Т. П. Руженская*
Художественный редактор *К. К. Федоров*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *О. С. Захарова*

Сдано в набор 18/VIII 1976 г. Подписано к печати 14/IV 1977 г. 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Печ. л. 9. Уч.-изд. л. 9,54. Тираж 2000 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ № 154.

Цена 26 к.